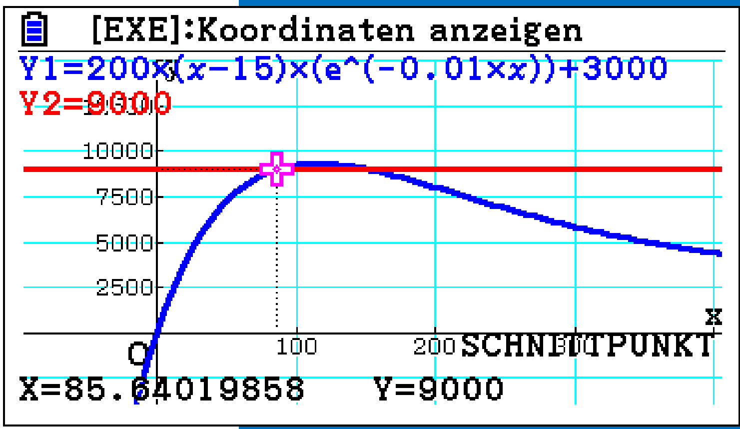
2. Unterrichtsvorhaben
in der Q2-Phase

Zusammengesetzte Funktionen untersuchen



Jörn Meyer

j.meyer@fals-solingen.de

www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Ketten- und Produktregel

Bisher haben wir die folgenden Ab- und Aufleitungsregeln kennengelernt:

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x)$ $(c \in \mathbb{R})$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	$F(x) = c \cdot F(x)$
Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x)$	$f(x) = g'(x) + h'(x)$	$F(x) = G(x) + H(x)$
Potenzregel: $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{R})$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} (n \in \mathbb{R}^{\neq -1})$
$f(x) = a^x$ $(a > 0)$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
$f(x) = e^{kx}$ $(k \in \mathbb{R}^{\neq 0})$	$f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot [\ln(x) - 1]$ (vgl. A…)
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \frac{2}{3x\sqrt{x}}$

Aufgabe 1 (Wiederholung)

Berechne den Ableitungsterm $f'(x)$ sowie den Term der Stammfunktion $F(x)$. **Gib** jeweils die angewendeten Regeln **an**.

+	++	+++	++++
$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x) = x \cdot (3x^2 - 1)$	$f(x) = (2x - x^2)^2$	$f(x) = \frac{(x-x^2)^2}{x^2}$
$f(x) = 3x^{-2} - \frac{1}{x}$	$f(x) = x^{-1}\left(x - \frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$	$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x}$
$f(x) = 12 \cdot 2^x$	$f(x) = 2^x(2^x - 2^{-x})$	$f(x) = (2^x + 1)^2$	$f(x) = 2^x \cdot (2^x + 2^{-x})^2$
$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$	$f(x) = 3 \cdot \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$	$f(x) = e^{2x} \cdot (1 - e^{-2x})$	$f(x) = \frac{(e^{2x}-e^{-2x})^2}{e^{4x}}$

Aufgabe 2 (Schmelzen von Eiszapfen)[1]

Viele Eiszapfen sind annähernd kegelförmig, sie unterscheiden sich aber im Volumen und im Verhältnis von Radius zu Länge. Bei Tauwetter lässt sich beobachten, dass die Länge eines Eiszapfens bei konstanter Umgebungstemperatur linear mit der Zeit abnimmt. Das Verhältnis aus Länge und Radius eines beobachteten Eiszapfens bleibt beim Schmelzen nahezu konstant. Ein kegelförmiger Eiszapfen sei 30 cm lang und oben 2 cm dick. Seine Länge verkürzt sich nach Beginn des Schmelzens innerhalb von 50 Minuten auf 19,5 cm.

a) **Begründe**, dass $l(t) = 30 - 0{,}21 \cdot t$ die Länge des Eiszapfens nach t Minuten modelliert.

b) Das Volumen des Eiszapfens hängt über die Volumenformel eines Kegels von seiner Länge l ab. **Zeige**, dass sich das Zapfenvolumen durch $V(l) = \frac{\pi}{2700} \cdot l^3$.

c) **Bestimme** das Volumen V in Abhängigkeit von der Zeit sowie die zeitliche Änderungsrate des Volumens zu Beginn, in der Mitte und am Ende des Schmelzvorgangs. **Deute** das Ergebnis.

[1] Fokus Mathematik LK NRW 2011, S. 92

Aufgabe 3 (Verkettung von Funktionen)

Ziel: Wie lernen nun eine neue Methode kennen, zwei Funktionen – wie in Aufgabe 2 bereits geschehen – zu einer neuen Funktion zusammenzusetzen.

a) Eine Funktion kann man als einen Automaten betrachten, in den man eine Zahl einwirft und der daraufhin eine bestimmte Zahl auswirft. **Ergänze** die Tabellen.

$u: x \longmapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe x	Ausgabe u(x)
4	2
100	10
a	
3z	

$v: x \longmapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe x	Ausgabe v(x)
5	
0,2	
2b – 1	
2^x	

b) Man kann zwei Automaten (Funktionen) hintereinanderschalten. In der folgenden Tabelle kommt zuerst der Automat u und dann der Automat v. In der zweiten Tabelle werden bei gleicher Angabe die Reihenfolge der Automaten umgekehrt.

$u: x \longmapsto u(x) = \sqrt{x}$	$v: x \longmapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
9	3	7
100		
a		
3x		
x – 1		
e^x		

$v: x \longmapsto v(x) = 2x + 1$	$u: x \longmapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
9	19	$\sqrt{19}$
100		
a		
3x		
x –1		
e^x		

Merke: Diese Hintereinanderschaltung von zwei Funktionen heißt **Verkettung von v und u.** Je nach Reihenfolge ergeben sich im Allgemeinen <u>verschiedene</u> Funktionswerte.

$\mathbf{v(\underbrace{u(x)})}$ (lies: „v von u von x“)
u zuerst anwenden
u ist die **innere**, v die **äußere Funktion**

$\mathbf{u(\underbrace{v(x)})}$ (lies: „u von v von x“).
v zuerst anwenden
v ist die **innere**, u die äußere **Funktion**

Beispiel: $v(x) = x^2$ und $u(x) = e^x$
$u(v(3)) = u(9) = e^9$; $v(u(3)) = (e^3)^2 = e^6$; $u(v(x)) = u(x^2) = e^{x^2}$; $v(u(x)) = v(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

c) Es ist $u(x) = x^2$ $[\text{bzw.} \sqrt{x}]$ und $v(x) = x + 1$ [bzw. e^{2x}]. **Berechne** $v(u(2)), u(v(2)), v(u(-1))$ und $u(v(-1))$. **Gib** die Funktionsterme $v(u(x))$ und $u(v(x))$ **an**.

Die **Verkettung der Funktionen** u und v hat je nach Reihenfolge die Namen
v∘u (lies: „v nach u“)
$\mathbf{(v \circ u)(x)} = v(u(x))$

u∘v („lies: u nach v“)
u∘v: $x \mapsto u(v(x))$

d) **Bestimme** zu $u(x) = x^2$ [bzw. $\ln(x)$] und $v(x) = 3x$ [bzw. $\frac{1}{x}$] die Funktionsterme von u∘v und v∘u.

Aufgabe 4 (Die Ableitung einer Verkettung von Funktionen)

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung einer Verkettung $f(x) = u(v(x))$ gefunden werden, falls die Ableitungen von u und v bekannt sind.

In der Tabelle werden nur Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ untersucht, die man nach Umformen des Funktionsterms mit den schon bekannten Ableitungsregeln ableiten kann.

Beispiel: $f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung. Wie lautet die Ableitung? f kann man ohne Verkettung schreiben: $f(x) = 9x^2$. Die Ableitung ist: $f'(x) = 18x$.

a) **Ergänze** die Tabelle. In der rechten Spalte liegt das eigentliche Problem!

f(x)	f´(x)	f als Verkettung	Wie ergibt sich f´(x) direkt aus der Verkettung?
$9x^2$	$\underline{18x}$	$v(x)=3x \quad u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(3x)^2$	$2{\cdot}(3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? $\underline{18x} = 2{\cdot}(3x)^1 \cdot$
$4x^2$	$\underline{8x}$	$v(x)= \quad u(x)=$ $f(x)=u(v(x)) = (2x)^2$	$2{\cdot}(2x)^1 =$ $\underline{8x} =$
$4x^2 + 4x + 1$		$v(x)= \quad u(x)=$ $f(x)=u(v(x))=(2x+1)^2$	
$x^4 + 2x^2 + 1$		$v(x)= \quad u(x)=$ $f(x)=u(v(x))=(x^2+1)^2$	
		$v(x)= \quad u(x)=$ $f(x)=u(v(x))=(x-1)^2$	

b) Aus der Tabelle kann man eine Vermutung zur Ableitung einer Verkettung erschließen. **Ergänze** die Worte <u>„innere(n)“</u> bzw. <u>„äußere(n)“</u>.

Vermutung: Leite zunächst die __________________ Funktion ab. Behandle dabei die __________________ Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der __________________ Funktion.

c) **Beurteile**, ob hier richtig abgeleitet wurde und **korrigiere** sie gegebenenfalls.

$f(x) = (6x + 4)^2$; $f'(x) = 2 \cdot (6x + 4) \cdot 6$ □ richtig □ falsch. Korrektur: f´(x) =________________
$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2$ □ richtig □ falsch. Korrektur: f´(x) =________________
$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4) \cdot 2$ □ richtig □ falsch. Korrektur: f´(x) =________________
$f(x) = (x^2 + 7)^2$; $f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2$ □ richtig □ falsch. Korrektur: f´(x) =________________

d) **Löse** Aufgabenteil c) aus Aufgabe 2 unter Nutzung der obigen Vermutung.

Kettenregel: Ist $f(x) = u(v(x))$ eine Verkettung von u und v, dann kann man die Ableitung folgendermaßen erhalten: $f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$.

Beispiele:

a) $f(x) = (5 - 3x)^4 = u(v(x)); u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3; v(x) = 5 - 3x \Rightarrow v'(x) = -3$
$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = u'(5 - 3x) \cdot v'(x) = 4 \cdot (5 - 3x)^3 \cdot (-3) = -12 \cdot (5 - 3x)^3$
b) $f(x) = e^{kx} = u\big(v(x)\big); u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x; v(x) = kx \Rightarrow v'(x) = k$
$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = u'(kx) \cdot v'(x) = e^{kx} \cdot k = k \cdot e^{kx}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} = u\big(v(x)\big); u(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow u'(x) = -x^{-2}; v(x) = x^2 + 1 \Rightarrow v'(x) = 2x$
$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) = u'(x^2 + 1) \cdot v'(x) = -(x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Aufgabe 5 (Anwendung der Kettenregel)

Berechne den Ableitungsterm f´(x). Dabei ist φ eine differenzierbare Funktion.

+	++	+++	++++
$f(x) = (x+1)^4$	$f(x) = 4 \cdot (x^2+1)^4$	$f(x) = (\varphi(x))^3$	$f(x) = \frac{1}{e^{x^2+1}}$
$f(x) = \ln(2x)$	$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2}$	$f(x) = \ln(\varphi(x))$	$f(x) = \ln(\sqrt{x})$
$f(x) = e^{2x}$	$f(x) = -3e^{-2x-1}$	$f(x) = e^{\varphi(x)}$	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$
$f(x) = (8x+1)^{-3}$	$f(x) = \ln(x^2)$	$f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$	$f(x) = \ln(\ln(x))$

Aufgabe 6 (Bakterienwachstum)

Die von einer Bakterienkultur überdeckte Fläche wächst pro Tag um ca. 10 %. Zu Beginn ist die Fläche etwa 5 cm³ groß.

a) **Begründe**, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt.

b) **Bestimme** die Fläche der Bakterienkultur fünf Tage nach Messbeginn bzw. drei Wochen vor Beginn der Messung, wenn man von exponentiellem Wachstum ausgeht.

c) **Ermittle** die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Wochen.

d) **Berechne**, wann die momentane Änderungsrate erstmals 10 cm³ pro Woche beträgt.

Aufgabe 7 (Aussagen zur Schar von Logarithmusfunktionen)[2]

Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a mit $f_a(x) = \ln(ax)\ (a \neq 0)$.

Begründe folgende Aussagen:

(1) Die Steigung des Graf von f_a ist unabhängig von a.
(2) Allen Grafen der Schar sind für $a > 0$ im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend.
(3) Allen Grafen der Schar sind für $a < 0$ im ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.
(4) Alle Grafen der Funktionsschar sind rechtsgekrümmt.

Aufgabe 8 (Kurvenuntersuchung)

Gegeben ist die Funktionen f mit $f(x) = \ln(x^2 + x)$.

a) **Berechne** den Definitionsbereich von f und skizziere den Grafen mit dem GTR.

b) **Untersuche** f rechnerisch auf Nullstellen und lokale Extremstellen.

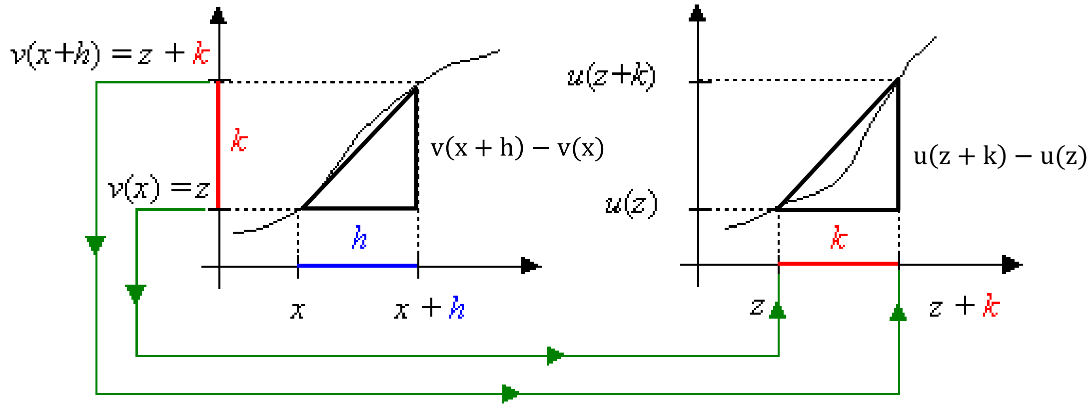
c) **Bestimme** die Stelle a, an welcher der Graf die Steigung -1,5 hat.

d) **Ermittle** die Tangente an den Grafen an der Stelle 2 und **ermittle** mithilfe des GTR alle Schnittpunkte des Grafen von f mit dieser Tangente.

[2] Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)

Aufgabe 9 (Beweis der Kettenregel)

Mithilfe der folgenden Abbildung und der nachfolgenden Definitionen kann die Kettenregel bewiesen werden.



Mittlere Steigung von v über dem Intervall $[\mathbf{x}; \mathbf{x}+\mathbf{h}]$ **=** $m_v[x; x+h]$	**Mittlere Steigung von u über dem Intervall** $[\mathbf{z}; \mathbf{z}+\mathbf{k}]$ **=** $m_u[z; z+k]$
$= \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k}$

Ableitung von v an der Stelle x = $v'(x)$	**Ableitung von u an der Stelle z =** $u'(z)$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$	$= \lim\limits_{k \to 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k}$

a) **Bringe** die folgenden fünf Blöcke in die richtige Reihenfolge. **Begründe** die Reihenfolge.

Mittlere Steigung von f mit f(x) = u(v(x)) über dem Intervall $[\mathbf{x}; \mathbf{x}+\mathbf{h}]$ **=** $m_f[x; x+h]$		
$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{k}{h}$	$= \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$
$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$= \frac{u(z+k)-u(z)}{h} \cdot \frac{k}{k}$ [$v(x) = z$ und $v(x+h) = z+k$ und Erweiterung mit $\frac{k}{k}$]	

b) **Bringe** die folgenden vier Blöcke in die richtige Reihenfolge. **Begründe** die Reihenfolge.

Ableitung von f an der Stelle x = $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} m_f[x; x+h]$	
$= u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$= u'(z) \cdot v'(x)$ [Setze $z = v(x)$]
$= \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \left[\frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$	$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

c) **Führe** den Beweis für f mit $f(x) = e^{3x}$ durch. Überlege zunächst, was v(x) = z, u(z) und k sind.

Aufgabe 10 (Ableitung eines Produktes zweier Funktionen)[3]

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung eines Produktes $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gefunden werden, falls die Ableitungen von u und v bekannt sind.

a) Peter sucht eine Ableitungsregel für das Produkt zweier Funktionsterme. Dafür schreibt er die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^6$ in ein Produkt mit den Faktoren $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^4$. **Weise** nach, dass $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$ gilt.

b) Nachdem er erkannt hat, dass im Allgemeinen $f'(x) \neq u'(x) \cdot v'(x)$ gilt, überlegt Peter, dass der Exponent beim Ableiten einer Potenzfunktion immer um eins verringert wird. Er vermutet daher, dass nur ein Faktor abgeleitet wird. **Vervollständige** dafür folgende Tabelle.

$\mathbf{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$	$\mathbf{u'(x) \cdot v(x)}$	$\mathbf{u(x) \cdot v'(x)}$
$x^6 = x^1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^5 = x^5$	$x^1 \cdot 5x^4 = 5x^5$
$x^6 = x^2 \cdot x^4$	$2x \cdot x^4 = 2x^5$	
$x^6 = x^3 \cdot x^3$		
$x^6 = x^4 \cdot x^2$		
$x^6 = x^5 \cdot x^1$		

Stelle mithilfe der Tabelle eine Vermutung für die Formel für die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ auf. **Überprüfe** die Gültigkeit der Formel auch für andere Potenzfunktionen.

Produktregel: Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit den differenzierbaren Funktionen u und v. Dann gilt für den Ableitungsterm $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$**.**

Beispiele:

a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-2x}$; $u(x) = x^2 + 1; u'(x) = 2x; v(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = -2e^{-2x}$ (Kettenregel!)
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (x^2 + 1) \cdot (-2) \cdot e^{2x} = (-2x^2 + 2x - 2) \cdot e^{-2x}$

b) $f(x) = x \cdot (2x + 1)^3; u(x) = x; u'(x) = 1; v(x) = (2x+1)^3; v'(x) = 6 \cdot (x^3 + 1)^2$ (Kettenregel!)
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot (2x+1)^3 + x \cdot 6 \cdot (2x+1)^2 = (2x + 1 + 6x) \cdot (x^3 + 1)^2$
$= (8x + 1) \cdot (x^3 + 1)^2$

c) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x)$; $u(x) = x^2 - 4; u'(x) = 2x; v(x) = \ln(x)$; $v'(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \ln(x) + (x^2 - 4) \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x - \frac{4}{x}$

Aufgabe 11 (Anwendung der Produktregel)

Berechne den Ableitungsterm $f'(x)$ unter Anwendung der Produktregel.

+	++	+++	++++
$f(x) = x \cdot (x+1)^3$	$f(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-0{,}5x+2}$	$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$
$f(x) = x \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	$f(x) = \frac{(x^2+1)^4}{x}$	$f(x) = x \cdot 2^{3x}$

[3] Idee aus Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)

Aufgabe 12 (Beweis der Produktregel)

Kurzform eines Beweises zur Ableitung eines Produktes ($\mathbf{u \cdot v}$) von Funktionen:

Binomische Formel: $(u+v)^2 = u^2 + 2 \cdot u \cdot v + v^2$

Beide Seiten ableiten:

(1) $2 \cdot (u+v) \cdot (u+v)' = 2 \cdot u \cdot u' + 2 \cdot (u \cdot v)' + 2v \cdot v'$

(2) $(u+v) \cdot (u' + v') = u \cdot u' + (u \cdot v)' + v \cdot v'$

(3) $u \cdot u' + u \cdot v' + v \cdot u' + v \cdot v' = u \cdot u' + (u \cdot v)' + v \cdot v'$

(4) $u' \cdot v + u \cdot v' = (u \cdot v)'$

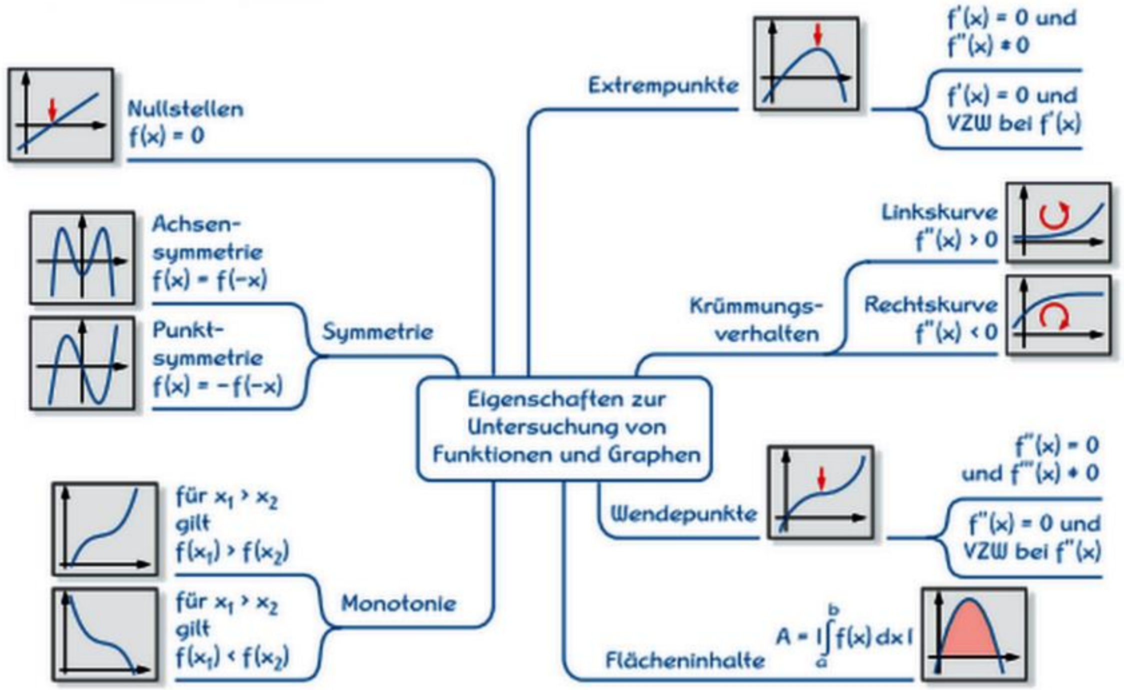
Erläutere, …

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term $(u+v)'$ und auf der rechten Seite die Terme u' und v' stehen.
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt $(u \cdot v)$ nur mit dem Ableitungszeichen versehen wird.
- welche Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 durchgeführt wurde.
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde.
- wie man von Zeile (3) nach (4) kommt und **formuliere** Zeile (4) in Deinen eigenen Worten.

2 Funktionsuntersuchung mit und ohne Sachkontext

Kurvenuntersuchung ohne Sachzusammenhang

Manche Eigenschaften einer Funktion lassen sich am Funktionsterm ablesen, anderen können aus den Verlauf des Grafen ermittelt werden. Dazu zählen vor allem Extremstellen, Wendestellen und das Steigungs- und Krümmungsverhalten. In der folgenden Grafik sind die wichtigsten Verfahren einer Kurvenuntersuchung dargestellt.



Aufgabe 1 (Verhalten an den Rändern)

Bei zusammengesetzten Funktionen gelten besondere Regeln beim Randverhalten:

$\frac{x^n}{e^x} = x^n \cdot e^{-x}$ strebt für	$x \to +\infty$ gegen	$x \to -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}$ und n ungerade	0	$-\infty$
$n \in \mathbb{N}$ und n gerade	0	0

$x^n \cdot e^x$ strebt für	$x \to +\infty$ gegen	$x \to -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}$	$+\infty$	0

Merke: Für $x \to \pm\infty$ dominiert e^x über x^n.

$x^n \cdot \ln(x)$ strebt für	$x \to 0$ gegen	$x \to +\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0	$-\infty$

$\frac{\ln(x)}{x^n} = x^{-n} \cdot \ln(x)$ strebt für	$x \to 0$ gegen	$x \to -\infty$ gegen
$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$-\infty$	0

Merke: Für $x \to +\infty$ und $x \to 0$ dominiert x^n über $\ln(x)$.

Überprüfe die Tabelleneinträge anhand passender Beispiele mithilfe Deines GTR.

Aufgabe 2 (Grundaufgaben)

a) Bei jeder Kurvenuntersuchung muss in der Regel mindestens eine Nullstellenuntersuchung durchgeführt werden. **Gib** möglichst viele Belegungsmöglichkeiten für die Variablen c und k **an**. so dass der folgende Term den Wert Null annimmt: $c \cdot \left(e^k - 1\right) \cdot \frac{3-c}{k+1}$.

b) **Berechne** die Nullstellen folgender Funktionen.

+	++	+++
$f(x) = (x+4) \cdot e^x$	$f(x) = (x^2 - 7x + 6) \cdot e^{2x}$	$f(x) = (e^{2x} - 9e^x + 8) \cdot (e^{-x} - 1)$
$f(x) = x \cdot (x+1)^3 \cdot (x^2 - 9)$	$f(x) = (e^{2x} - 1) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^x - 5x \cdot e^x + 4 \cdot e^x$

c) **Untersuche** die Grafen folgender Funktionen rechnerisch auf Symmetrie.

+	++	+++
$f(x) = e^{2x^2+6}$	$f(x) = x^4 + x^{-2} + 4$	$f(x) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$
$f(x) = e^{-x} + e^x$	$f(x) = (x^5 + x^3 - 22{,}5x) \cdot x^3$	$f(x) = e^{-x} - e^x$

d) **Berechne** die Extrem- und Wendestellen der Funktion f.

+	++	+++
$f(x) = (x-7) \cdot e^x$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$	$f(x) = x \cdot \ln(2x+1)$ (GTR)
$f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(x)$ (GTR)

Aufgabe 3 (Kurvenuntersuchung)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

a) **Berechne** die Null-, loaklen Extrem- und Wendestellen und **untersuche** den Graphen auf sein Krümmungsverhalten sowie auf sein Verhalten im Unendlichen. **Skizziere** den Grafen von f mithilfe dieser Ergebnisse.

b) **Ermittle** die Gleichung der Tangente im Wendepunkt und **bestimme** den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse.

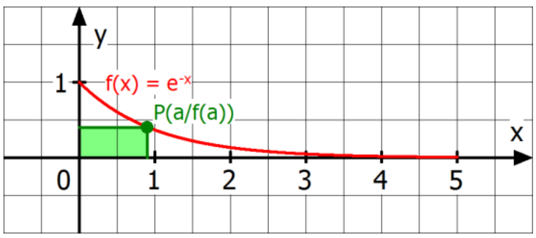
c) **Zeige**, das die Funktion F mit $F(x) = -20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion zu f ist.

d) **Berechne** mithilfe von F den Flächeninhalt der Fläche, den der Graf von f mit den beiden Koordinatenachsen und der Geraden x = 10 einschließt.

e) Der Graf von f schließt mit der x-Achse über dem Intervall [0; a] eine Fläche ein. **Ermittle** mithilfe des GTR, für welchen Wert für a diese Fläche den IFlächeninhalt 35 besitzt. **Berechne** den Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche, den der Graf von f mit der positiven x-Achse einschließt.

Aufgabe 4 (Extremwertaufgabe)

Auf dem Intervall [0; 5] ist der Graf der Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$ gegeben. Der Punkt P(a/f(a)), der Koordinatenursprung und die Punkte (0/f(a)) und (a/0) schließen für a > 0 sind Ecken eines Rechtecks.



Untersuche für welchen Wert für a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt einschließt.

Aufgabe 5 (Kurvenuntersuchung einer Funktionsschar)

Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = (2x + 3t) \cdot e^{x+1}$.

a) **Bestimme** die Schnittpunkte mit beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von t.

b) **Untersuche** den Grafen der Funktionsschar auf sein Verhalten im Unendlichen.

c) **Berechne** die Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von t.

d) **Ermittle** t so, dass der Punkt $P(-1/4)$ auf dem Grafen von f_t liegt.

e) **Beschreibe** die Veränderung der Extrempunkte bei der Erhöhung von t.

f) **Bestimme** die Ortskurve, auf der die Extrempunkte des Grafen von f_t liegen.

Aufgabe 6 (Kurvenuntersuchung einer Logarithmusfunktion)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x)$.

a) **Gib** den Definitionsbereich von f **an**.

b) **Berechne** die Schnittpunkte des Grafen mit der x-Achse sowie die Extrem- und Wendepunkte.

c) **Begründe**, dass $f(x) \to 0$ für $x \to 0$ gilt.

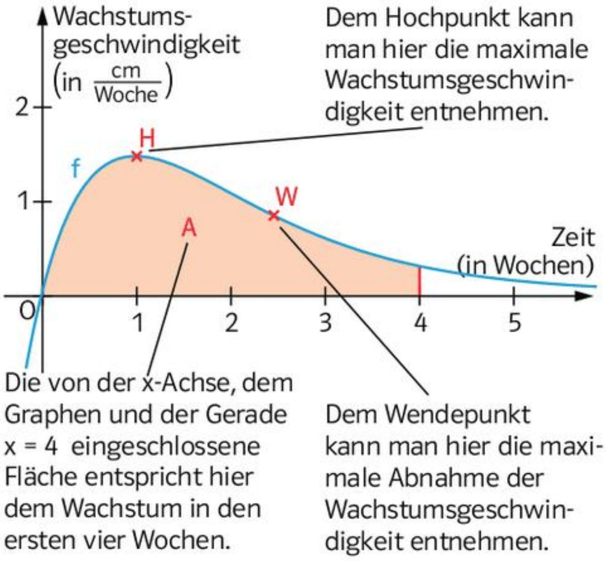
d) **Bestimme** rechnerisch die Gleichung der Tangente im Punkt $P(e/f(e))$.

e) **Ermittle** unter Zuhilfenahme des GTR den Flächeninhalt der Fläche, die vom Grafen von f, von der Tangente im Punkte $P(e/f(e))$ und der y-Achse eingeschlossen wird.

Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang

Aufgabe 1 (Wachstum einer Pflanze)[4]

Wenn die Funktion f als Modell für einen Sachzusammenhang dargestellt wird, lassen sich viele Fragen im Sachzusammenhang mithilfe der Funktion f beantworten, indem man z. B. die charakteristischen Punkte, das Monotonie-Verhalten, die Krümmung oder das Integral betrachtet. In der folgenden Abbildung wird die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.



Dabei entsprechen bestimmten Fragen im Sachkontext mathematische Fragestellungen, die dann mit Hilfe von Rechenverfahren gelöst werden:

Frage im Sachzusammenhang	Frage bei der Kurvenuntersuchung	Mögliche Rechenverfahren
Wann ist die Wachstumsgeschwindigkeit am größten?	Wo erreicht die Funktion f ihr Maximum?	Untersuchen auf Hochpunkte und das Verhalten von f an den Definitionsrändern.
Wann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit am meisten ab?	Wo und wann erreicht die Ableitung von f ihr Minimum?	Untersuchen auf Wendepunkte und das Verhalten von f´ an den Definitionsrändern
Wie viel ist die Pflanze in den ersten vier Wochen gewachsen?	Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f mit der x-Achse über dem Intervall [0; 4] ein?	Berechnung des Integrals: $\int_0^4 f(t)dt$
Wie hoch ist die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 4 Wochen?	Welchen Mittelwert hat die Funktion f im Zeitintervall [0; 4]?	Berechnung des Mittelwertes der Funktion mithilfe des Integrals: $\frac{1}{4-0}\int_0^4 f(t)dt$

Beantworte die Fragen in der Tabelle, falls die **momentane Wachstumsgeschwindigkeit** einer Pflanze durch die folgende Funktionsgleichung beschrieben wird: $f(t) = 5t \cdot e^{-t}, t \geq 0$.

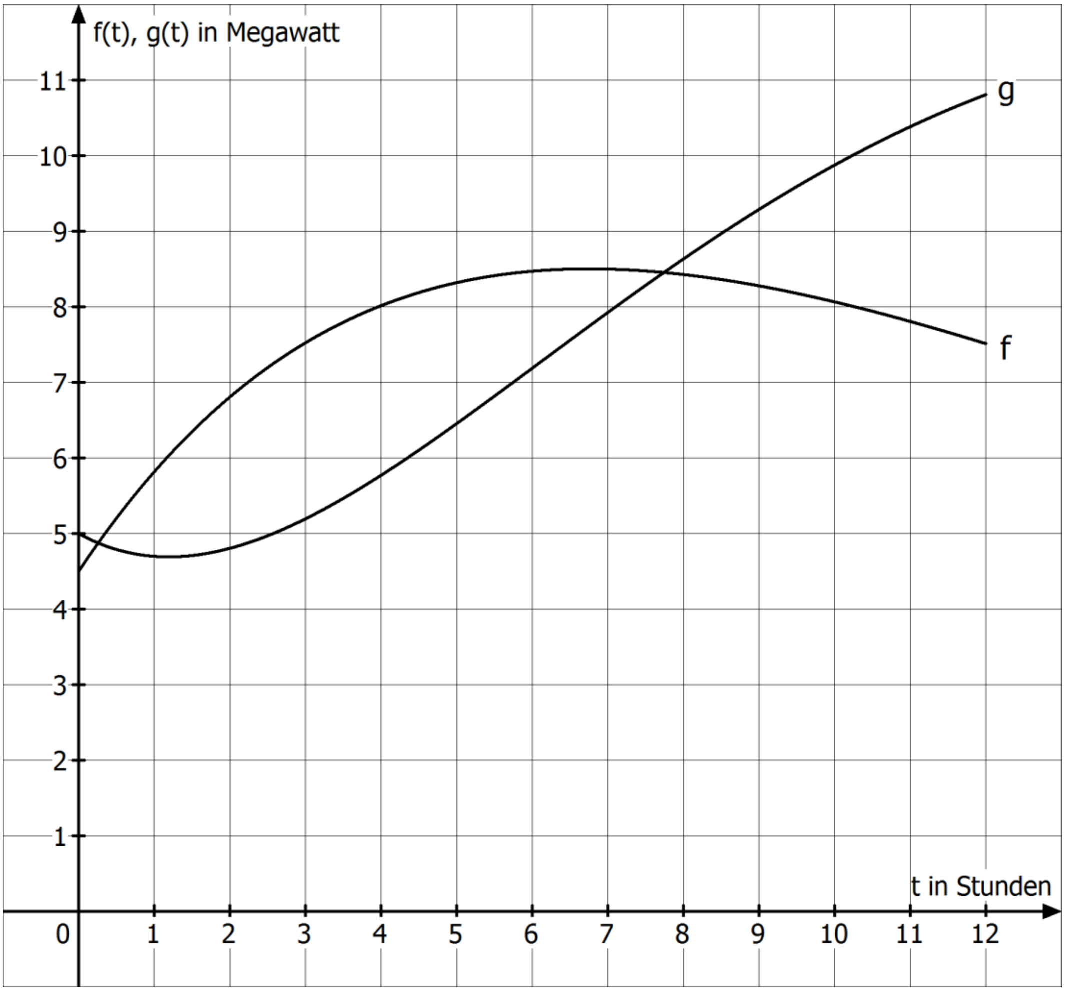
[4] Idee aus Lambacher Schweizer LK Mathematik NRW (2014)

Aufgabe 2 (Abituraufgabe 2015)

In der Nähe einer Stadt liegt ein Windpark. Sowohl der Bedarf dieser Stadt an elektrischer Leistung als auch die in dem Windpark erzeugte elektrische Leistung zeigen einen durch Untersuchungen belegten typischen zeitlichen Verlauf und werden modellhaft für den Zeitraum von 6.00 bis 18.00 Uhr durch die beiden Funktionen f (Bedarf) und g (Erzeugung) mit den Gleichungen

$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$ $(0 \leq t \leq 12)$ und $g(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 + 5\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$ $(0 \leq t \leq 12)$

beschrieben (t in Stunden, f(t) und g(t) in Megawatt). Der Zeitpunkt t = 0 entspricht dabei der Uhrzeit 6.00 Uhr morgens. Die Graphen der Funktionen f und g sind im Folgenden dargestellt.



a) (1) **Beschreibe** anhand der Graphen der Funktionen f und g den zeitlichen Verlauf, der von der Stadt benötigten und der von dem Windpark erzeugten elektrischen Leistung.
(2) **Berechne** die prozentuale Steigerung des Leistungsbedarfs der Stadt zwischen 6.00 Uhr und 8.00 Uhr.
(3) **Bestimme** (ohne GTR) auf die Minute genau, in welchem Zeitraum der Leistungsbedarf der Stadt nicht durch den Windpark allein gedeckt werden kann.

b) (1) **Ermittle** rechnerisch, um wie viel Uhr der Leistungsbedarf der Stadt am größten ist, und berechne diesen maximalen Leistungsbedarf.
(2) **Bestimme** die Uhrzeit, zu der sich der Leistungsbedarf der Stadt betragsmäßig am stärksten ändert.

[Zur Kontrolle: $f'(t) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{27}{4} - t\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$ und $f''(t) = \frac{2}{81} \cdot \left(t - \frac{63}{4}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$]

Wenn durch eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion h der Leistungsbedarf eines Verbrauchers gegeben ist, dann wird der resultierende Energiebedarf dieses Verbrauchers im Zeitintervall [a; b] durch $\int_a^b h(t)dt$ dargestellt.

c) (1) **Weise** nach, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(t) = -\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$ eine Stammfunktion von f ist.

(2) **Berechne** den Gesamtbedarf der Stadt an elektrischer Energie [in Megawattstunden] für den betrachteten 12-Stunden-Zeitraum.

(3) Das Intervall $[t_1; t_2]$ sei der Zeitraum aus Teilaufgabe a) (3), in dem der Leistungsbedarf der Stadt nicht durch den Windpark allein gedeckt werden kann. Es gilt: $\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)]dt \approx 11{,}4$ und $\int_0^{12} [f(t) - g(t)]dt \approx 4{,}1$. **Interpretiere** diese Tatsache im Sachzusammenhang.

(4) Der Windpark soll so vergrößert werden, dass die dort erzeugte Leistung, die dann durch die Funktion L_k mit $L_k(t) = k \cdot g(t)$ ($0 \le t \le 12$ und $k > 1$) beschrieben wird, den Leistungsbedarf der Stadt während des betrachteten 12-Stunden-Zeitraums deckt. **Ermittle** den kleinsten Wert von k, für den dieses Ziel erreicht wird.

3 Kontrollaufgaben

Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Kompetenzen im Bereich der hilfsmittelfreien Aufgaben

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Ableitungsterme mittels Ketten- und Produktregel bestimmen.	1a				
Ableitungsterme geometrisch deuten.	1b				
ohne Rechnung Graf und Funktionsterm begründend zuordnen.	2a				
ein Integral einer zusammengesetzten Funktion bestimmen.	2b				
eine Gleichung einer Tangente an den Grafen berechnen.	3				
Nullstellen und Stammfunktion zusammengesetzter Funktionen bestimmen.	4a, b				
eine Extremwertaufgabe am natürlichen Logarithmus lösen.	5				
zusammengesetzte Funktionen auf Symmetrie untersuchen.	6				

Kompetenzen im Bereich der Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Funktionswerte berechnen und im Sachkontext deuten.	7a				
einen Funktionsgraf einer Funktionsschar zeichnen.	7b,8g				
Schnittstellen mit dem GTR berechnen und im Sachkontext deuten.	7c				
mittels Ketten- und Produktregel Ableitungsterme berechnen.	7d,f,i, 8c,f				
ein globales Maximum im Sachkontext bestimmen.	7d				
einen stärksten Anstieg im Sachkontext ermitteln.	7e				
Grafen einer Funktionsschar auf Monotonie untersuchen.	7g				
Veränderung des Scharparameters auf den Grafenverlauf untersuchen.	7h				
Integralwerte zusammengesetzter Funktionen berechnen und interpretieren.	7i				
die Bedeutung einer Integralfunktion (Wirkungsfunktion) angeben.	7i				
von Funktionsscharen Schnittstellen mit den Achsen berechnen.	8a				
eine Funktionsschar auf Symmetrieeigenschaften untersuchen.	8b				
eine Funktionsschar auf das Verhalten an den Rändern untersuchen.	8b				
parameterabhängige Flächen berechnen	8d				
uneigentliche Intergrale von Funktionsscharen berechnen.	8e				
parameterabhängige Wendepunkte einer Funktionsschar berechnen.	8f				
eine Gleichung einer Geraden aufstellen, die durch drei Punkte geht.	8g				
eine parameterabhängige Extremwertaufgabe lösen.	8h				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1 (Funktionseigenschaften)

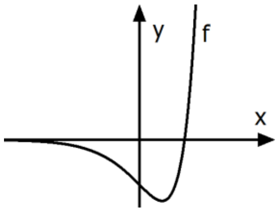
Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x \cdot e^{2x+1}$.

a) **Berechne** die erste und zweite Ableitung von f und den Wert der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle x = 0.

b) **Interpretiere** die Werte f´(0) und f´´(0) in Bezug auf den Verlauf des Grafen von f bei x = 0.

Aufgabe 2 (Funktionen)

a) Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Grafen einer Funktion f. Auf den Koordinatenachsen sind keine Einheiten angegeben. **Begründe** (ohne Rechnung), dass keine der beiden folgenden Funktionsvorschriften zu dem dargestellten Grafen gehören kann: $f_1(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$ und $f_2(x) = (x+2) \cdot e^{x}$.



b) **Berechne** $\int_0^1 (e^{-2x} + 2x^3 + 5)dx$.

Aufgabe 3 (Tangente)

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = e^{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. **Zeige**, dass die Tangente t an den Grafen der Funktion f im Punkt P(1 | f(1)) durch die Gleichung $t(x) = 2 \cdot e \cdot x - e$ beschrieben wird.

Aufgabe 4 (Nullstellen und Stammfunktion)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.

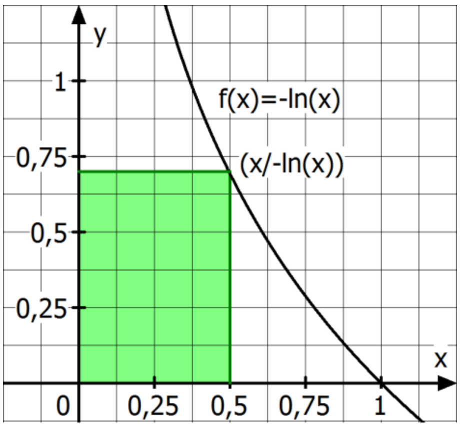
a) **Bestimme** die Nullstellen der Funktion f.

b) **Zeige**, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Gib eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f **an**, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Aufgabe 5 (Logarithmus und Extremwertaufgabe)

In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung rechts) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
- Ein Eckpunkt liegt auf dem Grafen von f mit der Gleichung $f(x) = -\ln(x)$ mit $0 < x < 1$.



Die Abbildung rechts zeigt ein solches Rechteck. Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt.

Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.

Aufgabe 6 (Symmetrie)

Untersuche die Funktionen f, g und h mit $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $g(x) = x^2 \cdot e^x$ auf Symmetrie.

Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 7 (Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang)

Eine Firma berechnet die täglichen Verkaufszahlen eines Handymodells, das neu eingeführt wird, modellhaft mit der Funktionsgleichung $f_k(t) = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + k \cdot 15$ ($k > 0$; t: Anzahl der Tage nach Einführung des neuen Modells; f(t): Handys pro Tag).

Sei im Folgenden zunächst $k = 200$.

a) **Bestimme** $f_{200}(9)$ und **gib** die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang **an**.

b) **Stelle** den Grafen zu f_{200} grafisch **dar**.

c) **Untersuche**, für welchen Zeitraum mehr als 9000 Handys pro Tag verkauft werden.

d) **Bestimme** $f'_{200}(t)$ und $f''_{200}(t)$ und **berechne** den Zeitpunkt, zu dem die tägliche Verkaufszahl maximal ist und **gib** die maximale tägliche Verkaufszahl **an**.

e) **Ermittle** den Zeitpunkt, an dem die täglichen Verkaufszahlen am stärksten ansteigen.

f) **Bestimme** $f'_k(t)$ und $f''_k(t)$ und zeige, dass der Zeitpunkt, für den die tägliche Verkaufszahl maximal ist, unabhängig von k ist.

g) **Zeige**, dass der Modellfunktion f_k zufolge die Verkaufszahlen für alle $k > 0$ ständig sinken, nachdem sie die maximale Verkaufszahl erreicht haben.

h) **Untersuche,** wie sich der Graf von f_k bei steigendem k ändert.

i) **Weise** nach, dass F_k mit $F_k(t) = k \cdot (-8500 - 100t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 15 \cdot k \cdot t$ ein Stammfunktion von f_k ist und **berechne** $\int_0^{100} f_k(t)\,dt$ und $\frac{1}{100-0} \cdot \int_0^{100} f_k(t)\,dt$. **Interpretiere** die Integralwerte im Sachkontext. **Gib** die Bedeutung der Funktion W mit $W(t) = \int_{115}^{t} f_k(x)\,dx$ ($t \geq 115$) im Sachzusammenhang **an**.

Aufgabe 8 (Funktionsschar ohne Sachzusammenhang)

Gegeben ist eine Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$ ($t \neq 0$).

a) **Bestimme** die Schnittpunkte der Grafen mit den Koordinatenachsen.

b) **Untersuche** die Funktionenschar auf mögliche Symmetrieeigenschaften und bestimme das Verhalten des Graphen für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

c) **Zeige**, dass F_t mit $F_t(x) = -\frac{t}{2} e^{-x^2}$ eine Stammfunktion von f_t ist.

d) **Berechne** den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, dem Grafen von f_t und der Geraden $x = a$ mit $a > 0$ eigeschlossen wird.

e) **Zeige**, dass der Inhalt der Fläche A_t aus d) für $a \to +\infty$ einen endlichen Wert annimmt.

f) **Zeige** $f_t''(x) = 2t \cdot (3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2}$. **Ermittle** die Wendepunkte von f_t in Abhängigkeit von t.

g) Eine Gerade g schneidet den Grafen der Funktion f_t in allen Wendepunkten. **Stelle** den Grafen von f_4 und g grafisch dar. **Berechne** die Gleichung der Gerade g.

h) Die Punkte A (0/0), B (a/0) und C ($a/f_4(a)$) bilden ein Dreieck ($a > 0$). **Berechne** den Wert für a, für den dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat.

Lösungen:

1 Ketten- und Produktregel

Aufgabe 1

Faktorregel (F), Summenregel (S), Potenzregel (P), Konstantenregel (K), Ableitung von e^{kx} bzw. a^x (EXP), Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion (LN).

+	++	+++	++++
$f(x) = 2x^2 - 2$ $f'(x) = 4x$ $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x$ F, S, P, K	$f(x) = x \cdot (3x^2 - 1)$ $= 3x^3 - x$ $f'(x) = 9x^2 - 1$ $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ F, S, P	$f(x) = (2x - x^2)^2$ $= 4x^2 - 4x^3 + x^4$ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3$ F, S, P	$f(x) = \frac{(x-x^2)^2}{x^2} = \left(\frac{x-x^2}{x}\right)^2$ $= (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ $f'(x) = 2x - 2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ F, S, P, K
$f(x) = 3x^{-2} - \frac{1}{x}$ $f'(x) = 3x^{-3} + x^{-2}$ $F(x) = -3x^{-1} - \ln(x)$ F, S, P	$f(x) = x^{-1}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ $= 1 - x^{-2}$ $f'(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ $F(x) = x + x^{-1} = x + \frac{1}{x}$ F, S, P, K	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{0,5} - x^{-0,5}$ $f'(x) = 0,5x^{-0,5} + 0,5x^{-1,5}$ $F(x) = \frac{2}{3}x^{1,5} - 2x^{0,5}$ S, P	$f(x) = \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x} = (\sqrt{x}+1)^2$ $= x + 2\sqrt{x} + 1$ $f'(x) = 1 + x^{-0,5}$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{1,5} + x$ F, S, P, K
$f(x) = 12 \cdot 2^x$ $f'(x) = 12\ln(2) \cdot 2^x$ $F(x) = \frac{12}{\ln(2)} \cdot 2^x$ F, F, EXP	$f(x) = 2^x(2^x - 2^{-x})$ $= 2^{2x} - 1 = (2^2)^x - 1$ $= 4^x - 1$ $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x - x$ S, EXP, K	$f(x) = (2^x + 1)^2$ $= (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 1$ $= 4^x + 2 \cdot 2^x + 1$ $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x + 2\ln(2) \cdot 2^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x + \frac{2}{\ln(2)} \cdot 2^x + x$ F, S, P, EXP, K	$f(x) = 2^x \cdot (2^x + 2^{-x})^2$ $= 2^x \cdot [(2^x)^2 + 2 + (2^{-x})^2]$ $= (2^x)^3 + 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^{-2x}$ $= 8^x + 2 \cdot 2^x + 2^{-x}$ $= 8^x + 2 \cdot 2^x + 0,5^x$ $f'(x) = \ln(8) \cdot 8^x + 2\ln(2) \cdot$ $2^x + \ln(0,5) \cdot 0,5^x$ $F(x) = \frac{1}{\ln(8)} \cdot 8^x + \frac{2}{\ln(2)} \cdot 2^x +$ $\frac{1}{\ln(0,5)} \cdot 0,5^x$ F, S, EXP, K
$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$ $f'(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ $F(x) = 3e^x + 2e^{-x}$ F, S, EXP	$f(x) = 3\left(e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right)$ $= 3(e^{2x} - e^{-2x})$ $f'(x) = 3(2e^{2x} + 2e^{-2x})$ $F(x) = 3\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$ F, S, EXP, K	$f(x) = e^{2x} \cdot (1 - e^{-2x})$ $= e^{2x} - 1$ $f'(x) = 2e^{2x}$ $F(x) = 0,5e^{2x} - x$ S, EXP, K	$f(x) = \frac{(e^{2x}-e^{-2x})^2}{e^{4x}}$ $= \left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}}\right)^2$ $= (1 - e^{-4x})^2$ $= 1 - 2e^{-4x} + e^{-8x}$ $f'(x) = 8e^{-4x} - 8e^{-8x}$ $F(x) = x + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{8}e^{-8x}$ F, S, P, EXP, K

Aufgabe 2

a) $l(t)$ = Startlänge – Längenverlust pro Minute = 30 - $30 - \frac{10,5}{50} \cdot t = 30 - 0,21 \cdot t$

b) Es gilt $\frac{l}{r} = 30 = \text{konstant} \Rightarrow V(l) = \frac{1}{3}G \cdot l = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{30}\right)^2 \cdot l = \frac{\pi}{2700} \cdot l^3$

c) $f(t) = V(l(t)) = \frac{\pi}{2700} \cdot (30 - 0,21 \cdot t)^3 = \frac{\pi}{2700} \cdot (30^3 - 3 \cdot 30^2 \cdot 0,21 \cdot t + 3 \cdot 30 \cdot 0,21^2 \cdot t^2 - 0,21^3 t^3)$

$f'(t) = \frac{\pi}{2700} \cdot (-3 \cdot 30^2 \cdot 0,21 + 2 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 0,21^2 \cdot t - 3 \cdot 0,21^3 t^2)$

$= -0{,}21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot (30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 0{,}21^1 \cdot t + 0{,}21^2 t^2) = -0{,}21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot (30 - 0{,}21 \cdot t)^{\,2}$

$f'(0) = -0{,}21 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2700} \cdot 900 \approx -0{,}66, f'(71{,}5) \approx -0{,}16;\;\; f'(143) = 0$

Es gilt für den Ableitungsterm: $f'(t) = \mathbf{-0{,}21 \cdot 3} \cdot (30 \mathbf{- 0{,}21} \cdot t)^{\,3-1}$

Aufgabe 3

$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$	
Eingabe x	Ausgabe u(x)
4	2
100	10
a	$\sqrt{a}$
3z	$\sqrt{3z}$

$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$	
Eingabe x	Ausgabe v(x)
5	11
0,2	1,4
2b – 1	4b – 1
2^x	$2 \cdot 2^x + 1$

$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
9	3	7
100	10	21
a	$\sqrt{a}$	$2\sqrt{a} + 1$
3x	$\sqrt{3x}$	$2\sqrt{3x} + 1$
x – 1	$\sqrt{x-1}$	$2\sqrt{x-1} + 1$
e^x	$\sqrt{e^x} = e^{0,5x}$	$2 \cdot e^{0,5x} + 1$

$v: x \mapsto v(x) = 2x + 1$		$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
9	19	$\sqrt{19}$
100	201	$\sqrt{201}$
a	$2a + 1$	$\sqrt{2a+1}$
3x	$6x + 1$	$\sqrt{6x+1}$
x – 1	$2x - 1$	$\sqrt{2x-1}$
e^x	$2e^x + 1$	$\sqrt{2e^x + 1}$

$u: x \mapsto u(x) = x^2$		$v: x \mapsto v(x) = x + 1$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
-1	1	2
2	4	5
x	x^2	$x^2 + 1$

$v: x \mapsto v(x) = x + 1$		$u: x \mapsto u(x) = x^2$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
-1	0	0
2	3	9
x	$x + 1$	$(x+1)^2$

$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$		$v: x \mapsto v(x) = e^{2x}$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
-1	nicht definiert	nicht definiert
2	$\sqrt{2}$	$e^{2\sqrt{2}}$
x	$\sqrt{x}$	$e^{2\sqrt{x}}$

$v: x \mapsto v(x) = e^{2x}$		$u: x \mapsto u(x) = \sqrt{x}$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
-1	e^{-2}	$\sqrt{e^{-2}} = e^{-1}$

2	e^4	$\sqrt{e^4} = e^2$
x	e^x	$\sqrt{e^x} = e^{0,5x}$

$u: x \longmapsto u(x) = x^2$		$v: x \longmapsto v(x) = 3x$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
x	x^2	$3x^2$

$v: x \longmapsto v(x) = 3x$		$u: x \longmapsto u(x) = x^2$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
x	3x	$9x^2$

$u: x \longmapsto u(x) = \ln(x)$		$v: x \longmapsto v(x) = \frac{1}{x}$
Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u = Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v
x	$\ln(x)$	$\frac{1}{\ln(x)}$

$v: x \longmapsto v(x) = \frac{1}{x}$		$u: x \longmapsto u(x) = \ln(x)$
Eingabe Automat v	Ausgabe Automat v = Eingabe Automat u	Ausgabe Automat u
x	$\frac{1}{x}$	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Aufgabe 4

f(x)	**f´(x)**	**f als Verkettung**	**Wie ergibt sich f´(x) direkt aus der Verkettung?**
$9x^2$	$\underline{18x}$	$v(x)=3x$ $u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(3x)^2$	$2 \cdot (3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor? $\underline{18x} = 2 \cdot (3x)^1 \cdot \mathbf{3}$
$4x^2$	$\underline{8x}$	$v(x)=$ **2x** $u(x)=$ **x^2** $f(x)=u(v(x)) = (2x)^2$	$2 \cdot (2x)^1 = 4x$ **ist falsch** $\underline{8x} = 2 \cdot (2x)^1 \cdot \mathbf{2}$
$4x^2 + 4x + 1$	**$\underline{8x+4}$**	$v(x)=$ **2x+1** $u(x)=$ **x^2** $f(x)=u(v(x))=(2x+1)^2$	**$2 \cdot (2x+1)^1 = 4x+2$ ist falsch** **$\underline{8x+4} = 2 \cdot (2x+1)^1 \cdot 2$**
$x^4 + 2x^2 + 1$	**$\underline{4x^3+4x}$**	$v(x)=$ **x^2+1** $u(x)=x^2$ $f(x)=u(v(x))=(x^2+1)^2$	**$2 \cdot (x^2+1)^1 = 2x^2+1$ ist falsch** **$\underline{4x^3+4x} = 2 \cdot (x^2+1)^1 \cdot 2x$**
$x^2 - 2x + 1$	**$\underline{2x-2}$**	$v(x)=$ **x–1** $u(x)=$ **x^2** $f(x)=u(v(x))=(x-1)^2$	**$2 \cdot (x-1)^1 = \underline{2x-2}$ ist richtig** **$\underline{2x-2} = 2 \cdot (x-1)^1 \cdot 1$**

Vermutung: Leite zunächst die **äußere** Funktion ab. Behandle dabei die **innere** Funktion als Variable. Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der **inneren** Funktion. Insgesamt gilt innere Ableitung mal äußere Ableitung.

$f(x) = (6x+4)^2$; $f´(x) = 2 \cdot (6x+4) \cdot 6$ ☒ richtig ☐ falsch.
$f(x) = (2x-4)^3$; $f´(x) = 3 \cdot (2x-4)^2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f´(x) = 3 \cdot (2x-4)^2 \cdot 2$
$f(x) = (2x-4)^3$; $f´(x) = 3 \cdot (2x-4) \cdot 2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f´(x) = 3 \cdot (2x-4)^2 \cdot 2$
$f(x) = (x^2+7)^2$; $f´(x) = 2 \cdot (x^2+7) \cdot 2$ ☐ richtig ☒ falsch. Korrektur: $f´(x) = 2 \cdot (x^2+7) \cdot 2x$

$$f(t) = V(l(t)) = \frac{\pi}{2700} \cdot \left(\underbrace{30 - 0{,}21 \cdot t}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Funktion } l(t)}} \right)^3 \xrightarrow[\text{äußere Funktion}]{V(l)=\frac{\pi}{2700} \cdot l^3 \text{ ist}} f´(t) = \underbrace{-0{,}21}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{inneren Funktion}}} \cdot \underbrace{3 \cdot (30 - 0{,}21 \cdot t)^{3-1}}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{äußeren Funktion}}}$$

Aufgabe 5

+	++	+++	++++
$f(x) = (x+1)^4$ $f'(x) = 4 \cdot (x+1)^3$	$f(x) = 4 \cdot (x^2+1)^4$ $f'(x) = 4 \cdot 4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot 2x$ $= 32x \cdot (x^2+1)^3$	$f(x) = (\varphi(x))^3$ $f'(x) = 3(\varphi(x))^2 \cdot \varphi'(x)$	$f(x) = \frac{1}{e^{x^2+1}} = \left(e^{x^2+1}\right)^{-1}$ $f'(x) = -\left(e^{x^2+1}\right)^{-2} \cdot 2xe^{x^2+1}$ $= \frac{2x \cdot e^{x^2+1}}{\left(e^{x^2+1}\right)^2}$
$f(x) = \ln(2x)$ $f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2}$ $= \left(\frac{1}{2}-5x\right)^{-2}$ $f'(x) = -2\left(\frac{1}{2}-5x\right)^{-3} \cdot (-5)$ $= \frac{10}{\left(\frac{1}{2}-5x\right)^3}$	$f(x) = \ln(\varphi(x))$ $f'(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$ $= \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{0,5})$ $= 0{,}5 \cdot \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{2x}$
$f(x) = e^{2x}$ $f(x) = 2 \cdot e^{2x}$	$f(x) = -3e^{-2x-1}$ $f'(x) = 6 \cdot e^{-2x-1}$	$f(x) = e^{\varphi(x)}$ $f'(x) = \varphi'(x) \cdot e^{\varphi(x)}$	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$
$f(x) = (8x+1)^{-3}$ $f'(x) = -3 \cdot (8x+1)^{-4} \cdot 8$ $= -24 \cdot (8x+1)^{-4}$	$f(x) = \ln(x^2)$ $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$	$f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$ $= (\varphi(x))^{0,5}$ $f'(x) = 0{,}5(\varphi(x))^{-0,5}$ $= \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}$	$f(x) = \ln(\ln(x))$ $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

Aufgabe 6

a) Der Startwert ist 5. Pro Tag wächst die Fläche mit dem Faktor 1,1: $A(t) = 5 \cdot 1{,}1^t$ (t: Zeit in Tagen).

b) $A(5) = 5 \cdot 1{,}1^5 = 8{,}05255; A(-3) = 5 \cdot 1{,}1^{-3} \approx 3{,}75657$

c) Es gilt t = 7w. $B(w) = A(7w) = 5 \cdot 1{,}1^{7w}$ (w: Zeit in Wochen).

$\frac{B(4)-B(0)}{4-0} = \frac{A(28)-A(0)}{4-0} \approx \frac{72{,}10497-5}{4} = 16{,}77624$ cm³ pro Woche.

d) $B'(w) = 5 \cdot \ln(1{,}1) \cdot 1{,}1^{7w} \cdot 7 = 10 \Leftrightarrow 1{,}1^{7w} = \frac{2}{7 \cdot \ln(1{,}1)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{7} \cdot \log_{1,1}\left(\frac{2}{7 \cdot \ln(1{,}1)}\right) \approx 1{,}6455$ Wochen.

Aufgabe 7

a) $f_a'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$. Alternativ: $f_a(x) = \ln(a \cdot x) = \ln(a) + \ln(x) \Rightarrow f_a'(x) = \frac{1}{x}$

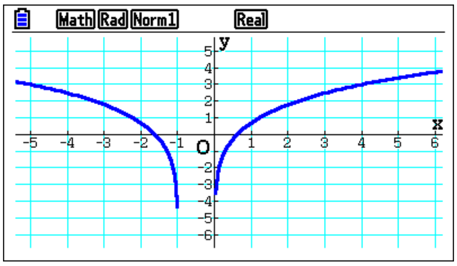
b) Aus a > 0 folgt, dass auch x > 0 sein muss, damit $f_a(x)$ definiert ist. Daher gilt $f_a'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Dies bedeutet, dass alle Grafen der Schar streng monoton wachsend sind.

c) Aus a < 0 folgt, dass auch x < 0 sein muss, damit $f_a(x)$ definiert ist. Daher gilt $f_a'(x) = \frac{1}{x} < 0$. Dies bedeutet, dass alle Grafen der Schar streng monoton fallend sind.

d) $f_a''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ Alle Grafen zu f_a sind rechtsgekrümmt

Aufgabe 8

a) Es muss gelten: $x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ oder $x < -1$: $D_f = \mathbb{R}^{<-1} \cup \mathbb{R}^{>0}$

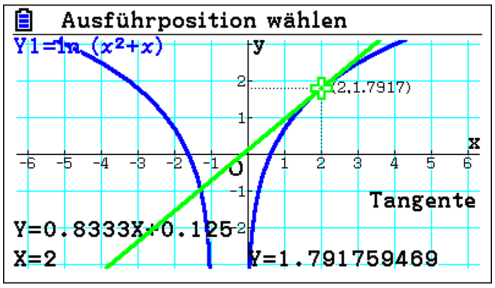


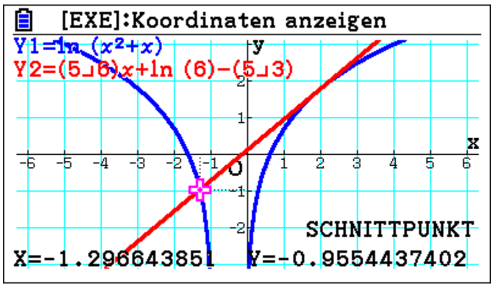
$\lim\limits_{x \to -1}(\ln(x^2+x)) = \lim\limits_{x \to 0}(\ln(x^2+x)) = -\infty$

b) $\ln(x^2+x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5 \pm \sqrt{1{,}25} \Leftrightarrow x \approx 0{,}62$ oder $x \approx -1{,}62$
$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5 \notin D_f \Rightarrow$ es existieren keine lokalen Extremstellen.

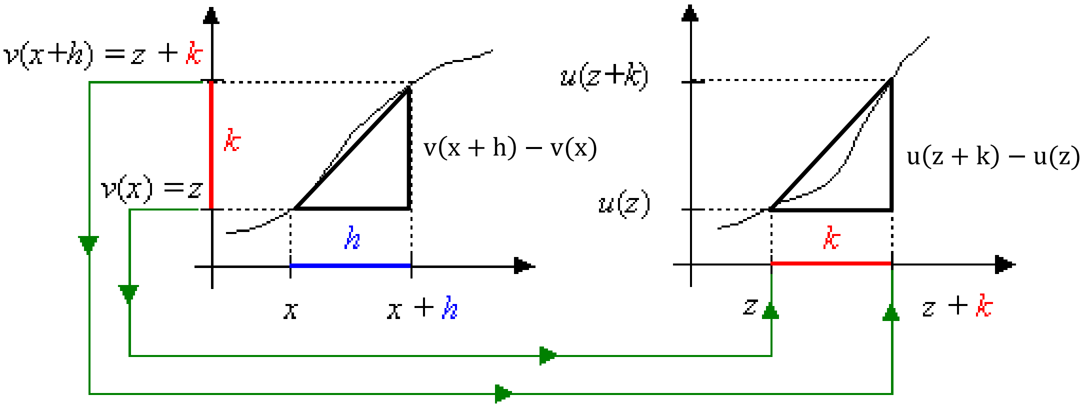
c) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = -1{,}5 \Leftrightarrow 2x + 1 = -1{,}5x^2 - 1{,}5x \Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 3{,}5x + 1 = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} x = -\frac{1}{3} \notin D_f \vee x = -2$

d) $m_t = f'(2) = \frac{5}{6}$ und $P(2/\ln(6))$ liefert $t(x) = \frac{5}{6}x + \ln(6) - \frac{5}{3} \approx 0{,}83x + 0{,}13$. Als einzigen Schnittpunkt (neben dem Berührpunkt P) ergibt sich $x \approx -1{,}30$.





Aufgabe 9



a) $m_f[x; x+h] \underbrace{=}_{\text{Definition}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underbrace{=}_{\text{Definition}} \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h} \underbrace{=}_{\substack{v(x)=z \text{ und} \\ v(x+h)=z+k \text{ und} \\ \text{Erweiterung mit } \frac{k}{k}}} \frac{u(z+k)-u(z)}{h} \cdot \frac{k}{k}$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{kommutativgesetzt} \\ \text{der Multiplikation}}} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{k}{h} \underbrace{=}_{\substack{v(x)=z \text{ und} \\ v(x+h)=z+k}} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} m_f[x; x+h] \underbrace{=}_{a)} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left[\frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] \underbrace{=}_{\text{Grenzwertsatz}} \lim\limits_{h\to 0} \frac{u(z+k)-u(z)}{k} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Grenzwertbildung}\\ \text{für } h\to 0}} u'(z) \cdot v'(x) \underbrace{=}_{v(x)=z} u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

c) $f(x) = u\big(v(x)\big) = e^{3x}$ mit $u(z) = e^z$ sowie $z = v(x) = 3x$ und $k = 3h$.

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underbrace{=}_{\text{Definition}} \frac{e^{3(x+h)}-e^{3x}}{h} \underbrace{=}_{\substack{\text{Distributiv-}\\ \text{gesetz}}} \frac{e^{3x+3h}-e^{3x}}{h} \underbrace{=}_{\substack{z=v(x)=3x\\ k=3h\\ v(x+h)=z+k\\ u(z)=e^z}} \frac{e^{z+k}-e^z}{h} \cdot \frac{k}{k} \underbrace{=}_{k=3h} \frac{e^{z+k}-e^z}{k} \cdot \frac{3h}{h} \underbrace{=}_{\text{kürzen}} \frac{e^{z+k}-e^z}{k} \cdot 3$

$\xrightarrow[h\to 0]{} e^z \cdot 3 \underbrace{=}_{z=3x} 3 \cdot e^{3x} = f'(x)$

Aufgabe 10

a) $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$; $v(x) = x^4 \Rightarrow v'(x) = 4x^3$; $f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^6$;
$f'(x) = 6x^5 \neq u'(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot 4x^3 = 6x^4$

b)

$\mathbf{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$	$\mathbf{u'(x) \cdot v(x)}$	$\mathbf{u(x) \cdot v'(x)}$
$x^6 = x^1 \cdot x^5$	$1 \cdot x^5 = x^5$	$x^1 \cdot 5x^4 = 5x^5$
$x^6 = x^2 \cdot x^4$	$2x \cdot x^4 = 2x^5$	$x^2 \cdot 4x^3 = 4x^5$
$x^6 = x^3 \cdot x^3$	$3x^2 \cdot x^3 = 3x^5$	$x^3 \cdot 3x^2 = 3x^5$
$x^6 = x^4 \cdot x^2$	$4x^3 \cdot x^2 = 4x^5$	$x^4 \cdot 2x^1 = 2x^5$
$x^6 = x^5 \cdot x^1$	$5x^4 \cdot x^1 = 5x^5$	$x^5 \cdot 1 = x^5$

Vermutung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgabe 11

+	++	+++	++++
$f(x) = x \cdot (x+1)^3$ $f'(x) = 1 \cdot (x+1)^3$ $+x \cdot 3 \cdot (x+1)^2$ $= (x+1)^2 \cdot (x+1+3x)$ $= (x+1)^2 \cdot (4x+1)$	$f(x) = (x^2+2x-1) \cdot e^{2x}$ $f'(x) = (2x+2) \cdot e^{2x}$ $+(x^2+2x-1) \cdot 2 \cdot e^{2x}$ $= (2x^2+6x) \cdot e^{2x}$	$f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x+2}$ $f(x) = 2x \cdot e^{-0,5x+2} + x^2 \cdot (-0,5) \cdot$ $e^{-0,5x+2} = (-0,5x^2+2x) \cdot$ $e^{-0,5x+2}$	$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2}$ $f_t'(x) = t \cdot e^{-x^2}$ $+tx \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}$ $= (t-2tx^2) \cdot e^{-x^2}$ $= t \cdot (-2x^2+1) \cdot e^{-x^2}$
$f(x) = x \cdot e^x$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$ $= (x+1) \cdot e^x$	$f(x) = x \cdot \ln(x)$ $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$ $= \ln(x) + 1$	$f(x) = \frac{(x^2+1)^4}{x}$ $= (x^2+1)^4 \cdot x^{-1}$ $f'(x) = 4(x^2+1)^3 \cdot 2x \cdot x^{-1}$ $+ (x^2+1)^4 \cdot (-1) \cdot x^{-2}$ $= (x^2+1)^3 \cdot (8-(x^2+1) \cdot x^{-2})$ $= (x^2+1)^3 \cdot (7-x^{-2})$	$f(x) = x \cdot 2^{3x}$ $f'(x) = 1 \cdot 2^{3x}$ $+x \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x} \cdot 3$ $= (1+\ln(8) \cdot x) \cdot 2^{3x}$

Aufgabe 12 (Beweis der Produktregel)

Erläutere, …

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term $(u + v)´$ und auf der rechten Seite die Terme $u´$ und $v´$ stehen. **Diese Terme stehen jeweils für die Ableitung der inneren Funktion.**
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt $(u \cdot v)$ nur mit dem Ableitungszeichen versehen wird. **Nach der Summenregel können die vier Summanden einzeln abgeleitet werden. Für den Summand $2 \cdot u \cdot v$ ist die Ableitung nach der Faktorregel $2 \cdot (u \cdot v)´$.**
- welche Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 durchgeführt wurde. **Beide Seiten wurden durch 2 dividiert. Ferner gilt nach der Summenregel $(u + v)´ = u´ + v´$.**
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde. **Die beiden Klammersummen werden ausmultipliziert mit dem Distributivgesetz.**
- wie man von Zeile (3) nach (4) kommt und **formuliere** Zeile (4) in Deinen eigenen Worten. **Auf beiden Seiten werden $u \cdot u´$ und $v \cdot v´$ subtrahiert.**

2 Funktionsuntersuchung mit und ohne Sachkontext

Aufgabe 2

a) $c \cdot (e^k - 1) \cdot \frac{3-c}{k+1} = 0 \underset{k\neq -1}{\Longleftrightarrow} c = 0 \ \vee e^k - 1 = 0 \vee 3 - c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee k = 0 \vee c = 3.$

b)

+	++	+++
$f(x) = (x+4) \cdot e^x = 0$ $\underset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} x = -4$	$f(x) = (x^2 - 7x + 6) \cdot e^{2x} = 0$ $\underset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 7x + 6 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 6}$ $= 3{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 3{,}5 \pm 2{,}5$ $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 6$	$f(x) = (e^{2x} - 9e^x + 8) \cdot (e^{-x} - 1) = 0$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 9e^x + 8 = 0 \vee e^{-x} - 1 = 0$ $\underset{z=e^x}{\Longleftrightarrow} z^2 - 9z + 8 = 0 \vee x = 0$ $\Leftrightarrow z = 4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 8} = 4{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}$ $= 4{,}5 \pm 3{,}5 \vee x = 0$ $\Leftrightarrow z = 1 \vee z = 8 \vee x = 0$ $\underset{z=e^x}{\Longleftrightarrow} x = 0 \vee x = \ln(8)$
$f(x) = x \cdot (x+1)^3 \cdot (x^2 - 9) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = \pm 3$	$f(x) = (e^{2x} - 1) \cdot e^{2x} = 0$ $\underset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$f(x) = x^2 \cdot e^x - 5x \cdot e^x + 4 \cdot e^x$ $= (x^2 - 5x + 4) \cdot e^x = 0$ $\underset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 5x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 6}$ $= 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 2{,}5 \pm 1{,}5$ $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$

c) Zu zeigen: f(x) = f(-x) (Achsensymmetrie = AS) oder f(-x) = - f(-x) (Punktsymmetrie = PS).

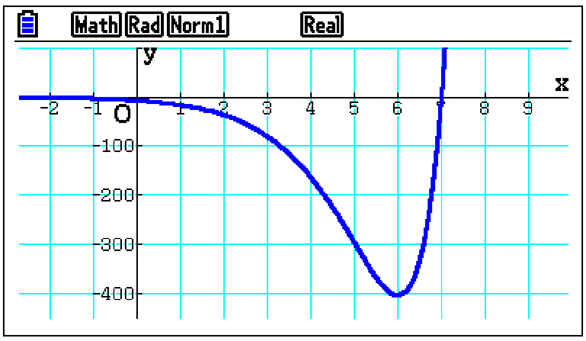
+	++	+++
$f(x) = e^{2x^2+6}$ $f(-x) = e^{2(-x)^2+6} = e^{2x^2+6}$ $= f(x)$ AS	$f(x) = x^4 + x^{-2} + 4$ $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^{-2} + 4$ $= x^4 + x^{-2} + 4 = f(x)$ AS	$f(x) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$ $f(-x) = (-x) \cdot (e^{-(-x)} + e^{-x})$ $= -x \cdot (e^x + e^{-x}) = x \cdot (e^{-x} + e^x)$ $= -f(x)$ PS
$f(x) = e^{-x} + e^x$ $f(-x) = e^{-(-x)} + e^{-x}$ $= e^x + e^{-x} = e^{-x} + e^x = f(x)$ AS	$f(x) = (x^5 + x^3 - 22{,}5x) \cdot x^3$ $= x^8 + x^6 - 22{,}5x^4$ AS, da f gerade ist.	$f(x) = e^{-x} - e^x$ $f(-x) = e^{-(-x)} - e^{-x} = e^x - e^{-x}$ $= -(-e^x + e^{-x}) = -(e^{-x} - e^x)$ $= -f(x)$ PS

d)

$f(x) = (x-7) \cdot e^x; f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-7) \cdot e^x = (x-6) \cdot e^x; f''(x) = 1 \cdot e^x + (x-6) \cdot e^x = (x-5) \cdot e^x$

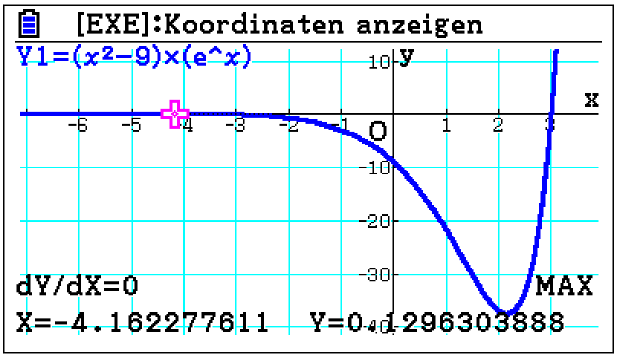
Lokale Minimumstelle bei x = 6, da $f'(6) = 0; f'(5) < 0; f'(7) > 0$

Wendestelle bei x = 5, da $f''(5) = 0$ mit VZW von f´´ bei 5 von – nach + (Re-Li-Wendestelle)



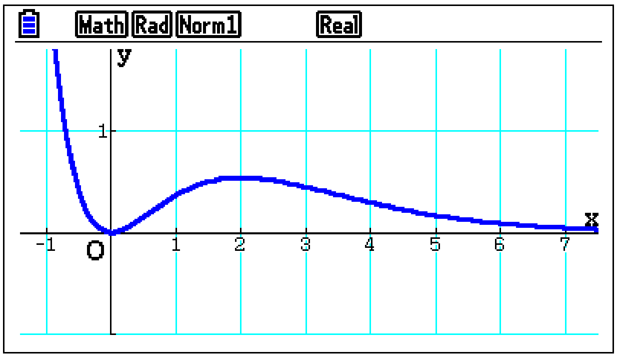
$f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x$; $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 9) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 9) \cdot e^x$; $f''(x) = (x^2 + 4x - 7) \cdot e^x$
Lokale Maximumstelle bei $-1 - \sqrt{10} \approx -4{,}16$ und lokale Minimumstelle bei $-1 + \sqrt{10} \approx 2{,}16$, da $f'\left(-1 \pm \sqrt{10}\right) = 0$; $f'(-5) > 0$; $f'(0) < 0$; $f'(3) > 0$.

Wendestellen bei $-2 \pm \sqrt{11} = -2 \pm 3{,}31$, da $f''\left(-2 \pm \sqrt{11}\right) = 0$; $f''(-6) > 0$; $f''(0) < 0$; $f''(2) > 0$; $-2 - \sqrt{11}$ ist Li-Re-Wendestelle und 1,31 ist Re-Li-Wendestelle.



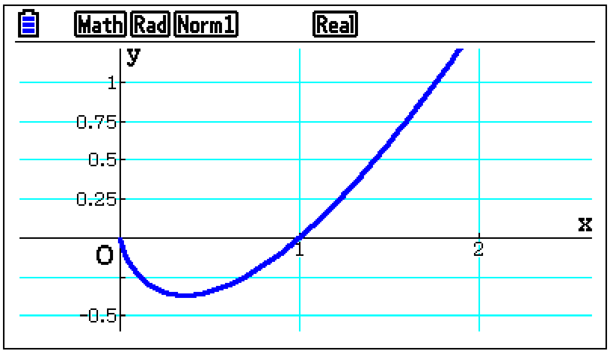
$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$; $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x} = 0 \underset{e^x > 0}{\Longleftrightarrow} -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
$f'(-1) < 0$; $f'(1) > 0$; $f'(3) < 0$: 0 ist lokale Minimumstelle und 2 ist lokale Maximumstelle.
$f''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \underset{e^x > 0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

$f''(0) > 0$; $f''(1) < 0$; $f''(4) > 0$: $2 - \sqrt{2}$ ist Li-Re-Wendestelle und $2 + \sqrt{2}$ ist Re-Li-Wendestelle.



$f(x) = x \cdot \ln(x)$ $(x > 0)$; $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$; $f''(x) = \frac{1}{x}$
$f''(e^{-1}) = e > 0$: e^{-1} ist lokale Minimumstelle

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: Der Graf von f ist linksgekrümmt.



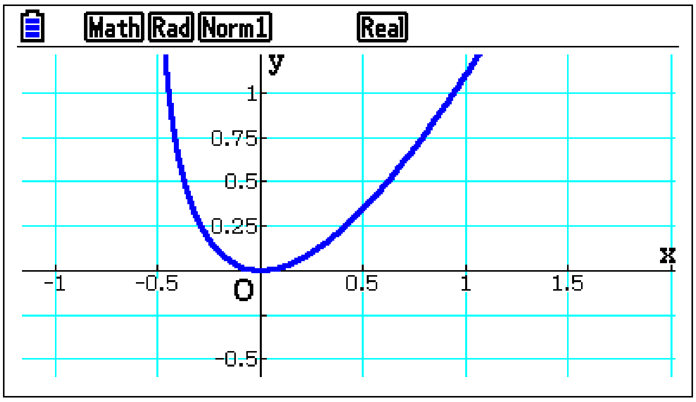
f(x) = x · ln(2x + 1) (x > -0,5)

$f'(x) = 1 \cdot \ln(2x+1) + x \cdot \frac{2}{2x+1} = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} = \ln(2x+1) + 2x \cdot (2x+1)^{-1}$

$f''(x) = \frac{2}{2x+1} + 2 \cdot (2x+1)^{-1} - 2x \cdot (2x+1)^{-2} = \frac{4}{2x+1} - \frac{2x}{(2x+1)^2} = \frac{4 \cdot (2x+1) - 2x}{(2x+1)^2} = \frac{6x+4}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} x = 0;\ f''(0) = 4 > 0$: 0 ist lokale Minimumstelle.

$f''(x) = \frac{6x+4}{(2x+1)^2} > 0$ für $x > -0{,}5$: Graf ist linksgekrümmt.

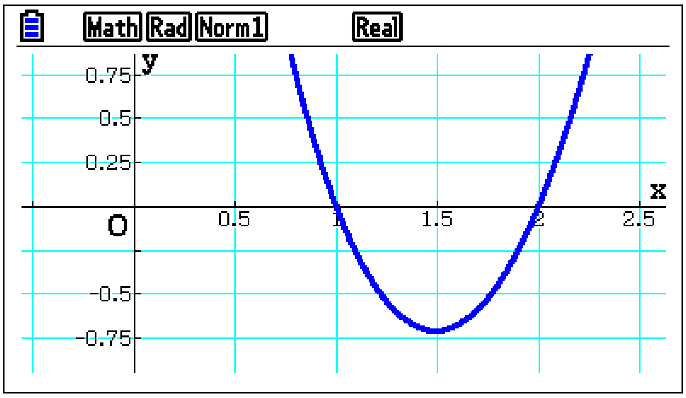


f(x) = (x² − 4) · ln(x) (x > 0)

$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot x^{-1} + 2x \cdot x^{-1} - (x^2-4) \cdot x^{-2} = 2\ln(x) + 4 - \frac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + (x^2-4) \cdot x^{-1} = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} x \approx 1{,}49; f''(1{,}49) > 0$: 1,49 ist lokale Minimumstelle

$f''(x) = 2\ln(x) + 4 - \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \ln(x) + 4x^2 - x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \ln(x) + 3x^2 + 4 > 0$ (GTR):
Graf ist linksgekrümmt.



Aufgabe 3

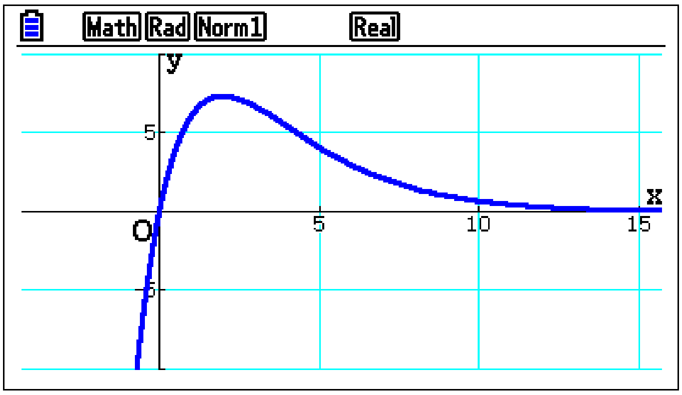
a) $f(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$. $f'(x) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 5x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (-5x+10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

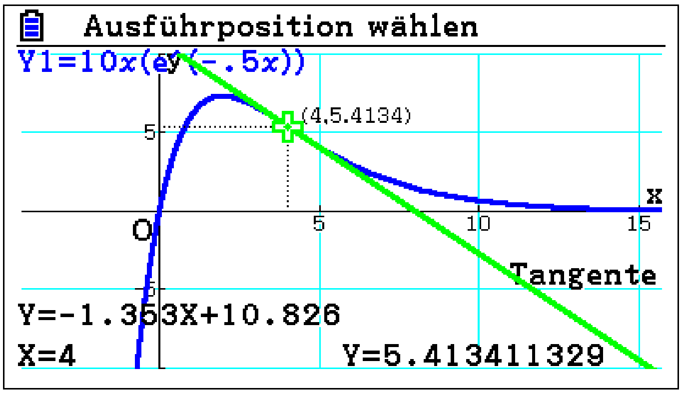
$f''(x) = -5 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-5x+10) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = (2{,}5x - 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2; f'(0) > 0; f'(3) < 0$: 2 ist lokale Maximumstelle.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4; f''(0) < 0; f''(5) > 0$: 4 ist Re-Li-Wendestelle.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) = 0$ (e-Term dominiert) und $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -\infty$





b) $m_t = f'(4) = -10 \cdot e^{-2}$ und $f(4) = 40 \cdot e^{-2}$ und $t(x) = m_t \cdot x + b \Rightarrow 40 \cdot e^{-2} = (-10 \cdot e^{-2}) \cdot 4 + b$
$\Rightarrow b = 80 \cdot e^{-2} \Rightarrow t(x) = -10 \cdot e^{-2} \cdot x + 80 \cdot e^{-2} \approx -1{,}35x + 10{,}83$

c) $F(x) = -20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow F'(x) = -20 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 20(x+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \big(-20 + 10(x+2)\big) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$
$= 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$

d) $\int_0^{10} \left(10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = \left[-20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{10} = -240 \cdot e^{-5} \text{—} 40 = 40 - 240 \cdot e^{-5} \approx 38{,}38$

e) $\int_0^{a} \left(10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = \left[-20(x+2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{a} = -240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} \text{—} 40 = 40 - 240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} \xrightarrow[a\to\infty]{} 40$
$40 - 240 \cdot e^{-\frac{1}{2}a} = 35 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}a} = \frac{5}{240} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow a = -2\ln\left(\frac{1}{48}\right) = -2 \cdot \ln(48^{-1}) = 2 \cdot \ln(48) \approx 7{,}74$

Aufgabe 4

$A(a) = a \cdot e^{-a}$
$A'(a) = e^{-a} - a \cdot e^{-a} = (-a+1) \cdot e^{-a} = 0 \Leftrightarrow a = 1;$
$A'(0{,}5) > 0; A'(1{,}5) < 0; A(0) = 0; A(1) = e^{-1}; A(5) = 5 \cdot e^{-5}$: 1 ist globale Maxiumstelle von A über $[0; 5]$ mit dem globalen Maximum e^{-1}.

Aufgabe 5

a) $f_t(x) = (2x+3t) \cdot e^{x+1} = 0 \underset{e^{x+1}>0}{\Longleftrightarrow} 2x + 3t = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5t; f_t(0) = 3e \cdot t$: $S_x(-1{,}5t/0); S_y(0/3e \cdot t)$.

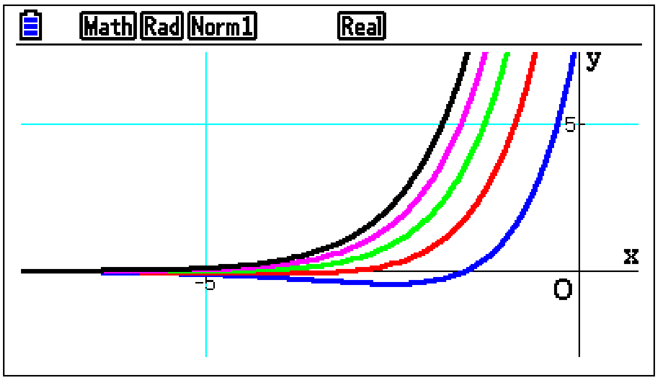
b) $f_t(x) = (2x+3t) \cdot e^{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty;\ f_t(x) = (2x+3t) \cdot e^{x+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

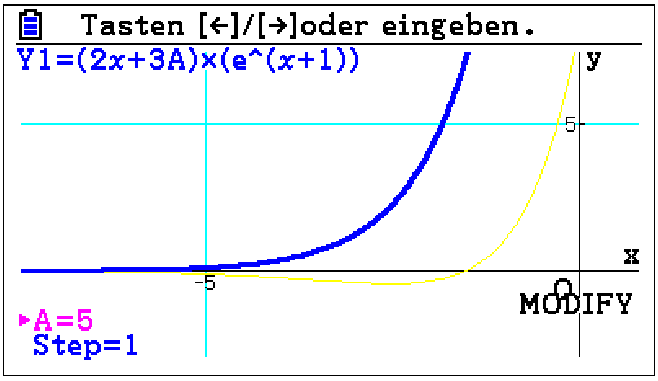
c) $f_t{}'(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1}$
$f_t{}''(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1}$
$f_t{}'''(x) = 2 \cdot e^{x+1} + (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1} = (2x + 3t + 6) \cdot e^{x+1}$
$f_t{}'(x) = (2x + 3t + 2) \cdot e^{x+1} = 0 \underset{e^{x+1}>0}{\Longleftrightarrow} 2x + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5t - 1$
$f_t{}''(-1{,}5t - 1) = (2 \cdot (-1{,}5t - 1) + 3t + 4) \cdot e^{-1{,}5t-1+1} = (-3t - 2 + 3t + 4) \cdot e^{-1{,}5t} = 2 \cdot e^{-1{,}5t} > 0$: $-1{,}5t - 1$ ist lokale Minimumstelle mit dem lokalen Minimum $f_t(-1{,}5t - 1) = (2 \cdot (-1{,}5t - 1) + 3t) \cdot e^{-1{,}5t} = -2 \cdot e^{-1{,}5t}$, also lautet die lokale Tiefpunktschar $(-1{,}5t - 1/\ -2 \cdot e^{-1{,}5t})$.

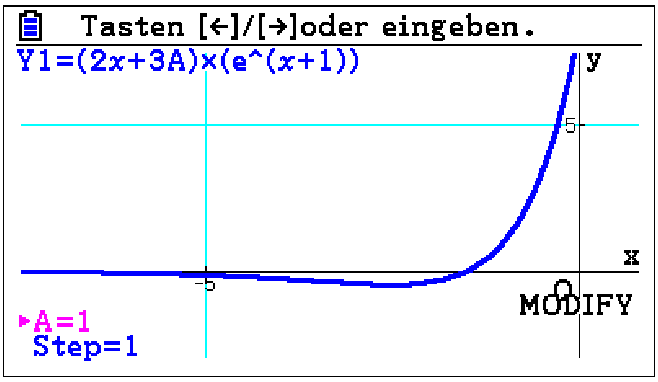
$f_t{}''(x) = (2x + 3t + 4) \cdot e^{x+1} = 0 \underset{e^{x+1}>0}{\Longleftrightarrow} 2x + 3t + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5t - 2$
$f_t{}'''(-1{,}5t - 2) = (2 \cdot (-1{,}5t - 2) + 3t + 6) \cdot e^{-1{,}5t-1} = 2 \cdot e^{-1{,}5t-1} > 0$: $x = -1{,}5t - 2$ ist Re-Li-Wendestelle mit y-Wert $f_t(-1{,}5t - 2\,) = (2 \cdot (-1{,}5t - 2\,) + 3t) \cdot e^{-1{,}5t-1} = -4 \cdot e^{-1{,}5t-1}$. Die Schar der Wendepunkte lautet $(-1{,}5t - 2/-4 \cdot e^{-1{,}5t-1}\,)$

d) $4 = (2(-1) + 3t) \cdot e^0 \Leftrightarrow 4 = -2 + 3t \Leftrightarrow t = 2$

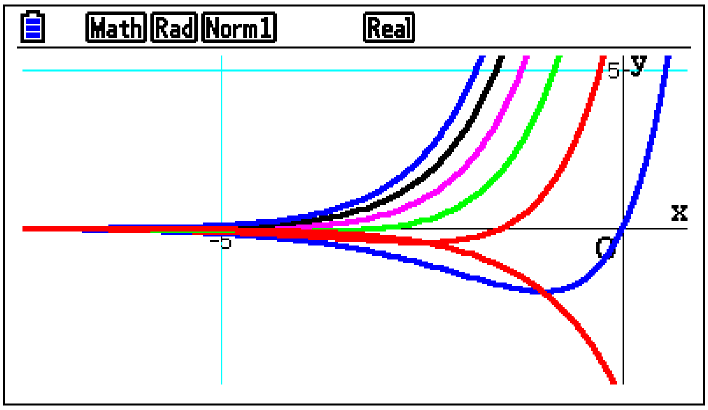
e)







f) $x = -1{,}5t - 1$ und $y = -2 \cdot e^{-1{,}5t}$. Forme $x = -1{,}5t - 1$ nach t um und setze es in y ein. $x = -1{,}5t - 1 \Leftrightarrow t = \frac{x+1}{-1{,}5} = -\frac{2}{3} \cdot (x+1)$ in y: $y = -2 \cdot e^{-1{,}5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (x+1)} = -2 \cdot e^{x+1}$

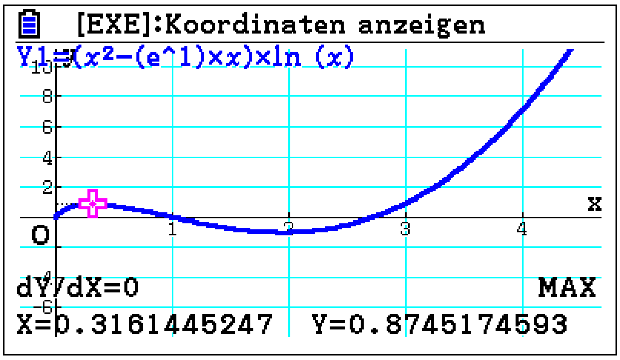


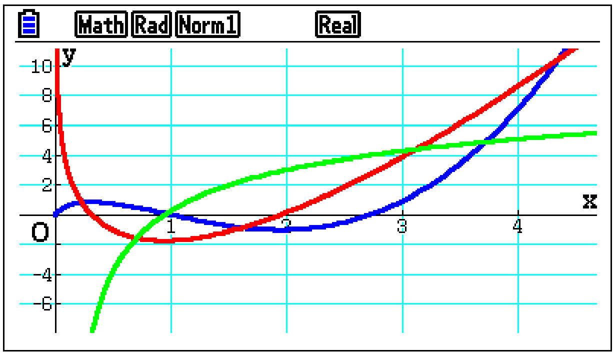
Aufgabe 6

a) $x > 0$

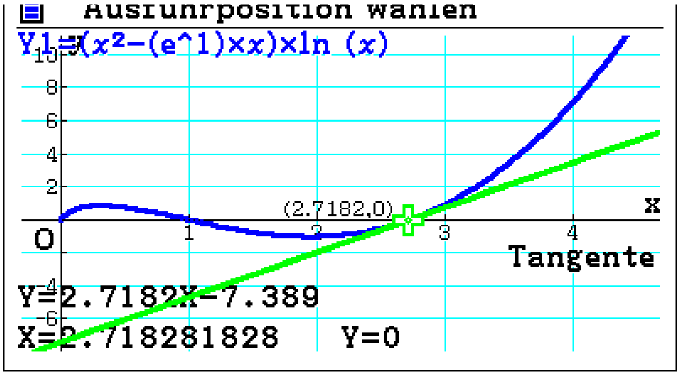
b) $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - e \cdot x = 0 \vee x = 1 \Leftrightarrow x = e \vee x = 1$: S_1 (1/0) und S_2 (e/0).
$f'(x) = (2x - e) \cdot \ln(x) + (x^2 - e \cdot x) \cdot x^{-1} = (2x - e) \cdot \ln(x) + x - e$
$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + (2x - e) \cdot x^{-1} + 1 = 2 \cdot \ln(x) + 3 - e \cdot x^{-1}$; $f'''(x) = 2 \cdot x^{-1} + e \cdot x^{-2}$
$f'(x) = (2x - e) \cdot \ln(x) + x - e = 0 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 0{,}32;\ x \approx 1{,}94$; $f'(0{,}2) > 0$;
$f'(1) = 1 - e < 0$; $f'(2) = (4 - e) \cdot \ln(4) + 4 - e > 0$: $x \approx 1{,}94$ ist lokale Minimumstelle mit dem lokalen Minimum $f(1{,}94) \approx -1$, und $x \approx 0{,}32$ ist lokale Maximumstelle mit dem lokalen Maximum Minimum $f(0{,}32) \approx -0{,}87$.

$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 3 - e \cdot x^{-1} = 0 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 0{,}94$; $f'''(0{,}94) > 0$; $f(0{,}94) \approx 0{,}10$:
Der Punkt W (0,94/0,10) ist ein Re-Li-Wendepunkt.



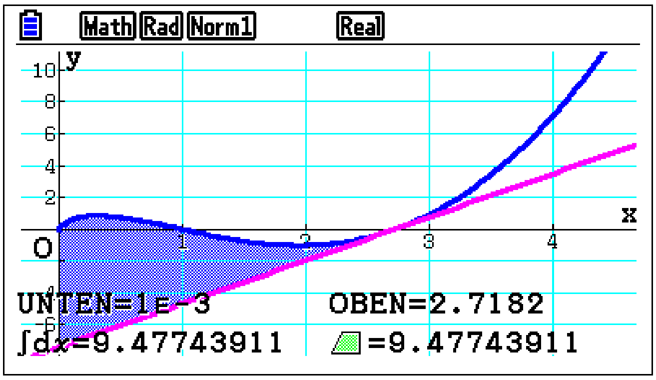


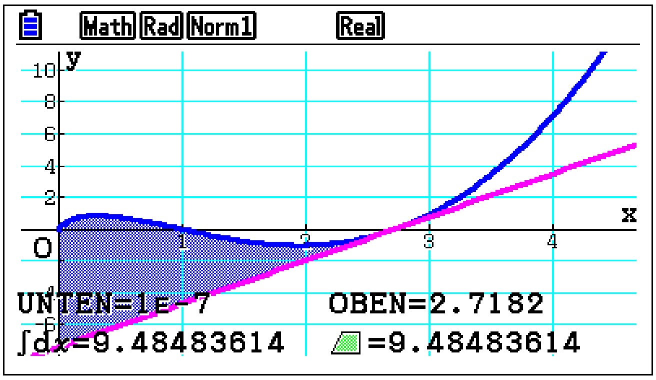
c) $f(x) = (x^2 - e \cdot x) \cdot \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, da jede Potenz von x schneller wächst als der natürliche Logarithmus (Potenzfunktion dominiert das Verhalten am Rand)



d) P(e/f(e)).
$m_t = f'(e) = e \cdot \ln(e^1) + e - e = e$ und $f(e) = (e^2 - e \cdot e) \cdot \ln(e) = 0$ und $t(x) = m_t \cdot x + b$
$\Rightarrow 0 = e \cdot e + b \Rightarrow b = -e^2 \Rightarrow t(x) = e \cdot x - e^2 \approx 2{,}71x - 7{,}39$

e) $A = \lim\limits_{L \to 0} \int_L^e [f(x) - t(x)]\,dx \approx \int_{0,000001}^e [f(x) - t(x)] \approx 9{,}41$ (über GSolv (F5) und Integral (F6 und F3) und Mixed (F4) und untere Grenze nahe Null sowie obere Grenze e eingeben.)





Kurvenuntersuchung mit Sachzusammenhang

Aufgabe 1

Ableitungen und Stammfunktion:
$f'(t) = 5 \cdot e^{-t} + 5t \cdot (-e^{-t}) = (5 - 5t) \cdot e^{-t}$
$f''(t) = -5 \cdot e^{-t} + (5 - 5t) \cdot (-e^{-t}) = (5t - 10) \cdot e^{-t}$
$f'''(t) = 5 \cdot e^{-t} + (5t - 10) \cdot (-e^{-t}) = (15 - 5t) \cdot e^{-t}$
$F(t) = (-5 - 5t) \cdot e^{-t}$ (Warum?)

Globales Maximum von f – Maximale Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze:
$f'(t) = 5 \cdot e^{-t} + 5t \cdot (-e^{-t}) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$
$f''(1) = -5 \cdot e^{-1} < 0$: 1 ist lokale Maximumstelle. Wegen des Randverhaltens $f(t) = 5t \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ und $f(t) = 5t \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$ und $f(1) = 5e^{-1} > 0$ handelt es sich um eine globale Maximumstelle.

Wendestelle – globales Minimum von f´ - maximale Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit:
$f''(t) = (5t - 10) \cdot e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = 2; f'''(2) = 5 \cdot e^{-2} > 0$: 2 ist Re-Li-Wendestelle. Darüber hinaus gilt $f'(t) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ und $f'(t) = (5 - 5t) \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty$ und $f'(2) = -5e^{-2} < 0$. Daher handelt es sich bei t = 2 um ein globales Minimum von f´.

Integral – Zunahme der Pflanzenlänge: $\int_0^4 f(t)dt = [(-5 - 5t) \cdot e^{-t}]_0^4 = -25e^{-t} - (-5) = 5 - 25e^{-4}$
Mittelwert der Funktion - durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit:
$$\frac{1}{4-0} \int_0^4 f(t)dt = 1{,}25 - 6{,}25e^{-4}$$

Aufgabe 2

a) (1) Der Bedarf steigt von 6.00 (4,5 MW) bis zu seinem globalen Maximum um ca. 12.30 (8,5 MW) an und fällt anschließend bis um 20 Uhr auf einen höheren Wert als um 6.00 (7,5 MW). an Die Erzeugung startet um 6.00 bei 5 MW, fällt bis 7.30 auf sein globales Minimum (4,5 MW) ab, steigt dann wieder bis 20 Uhr auf eine Wert von knapp 11 MW an. Die Erzeugung nimmt gegen 13 Uhr am stärksten zu. Erzeugung und Bedarf sind um ca. 13.30 gleich groß (8,5 MW).

(2) $f(0) = 4{,}5$, $f(2) = 9{,}5 \cdot e^{-\frac{2}{9}}$. Prozentuale Abweichung: $\frac{f(2)-f(0)}{f(0)} = \frac{9{,}5 \cdot e^{-\frac{2}{9}} - 4{,}5}{4{,}5} \approx 0{,}69 = 69\%$

(3) $f(t) = g(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = \left(\frac{1}{4}t^2 + 5\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} \xLeftrightarrow[:\, e^{-\frac{1}{9}t} > 0]{} \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) = \frac{1}{4}t^2 + 5$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}t^2 - 2t + 0{,}5 = 0 \underset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{14} \Leftrightarrow x \approx 7{,}74 \vee x \approx 0{,}26$.
Im Zeitraum zwischen 6:15 und 13:44 ist der Bedarf höher als die Erzeugung.

b) (1) $f'(t) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot (4t + 9) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = \left(-\frac{2}{9}t + \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}t + \frac{3}{2} = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{27}{4} = 6{,}75$; $f'(6) > 0; f'(7) < 0; f(6{,}75) = 18 \cdot e^{-0{,}75} \approx 8{,}50; f(0) = 4{,}5; f(12) = 28{,}5 \cdot e^{-\frac{4}{3}}$ $\approx 7{,}51$: Der höchste Bedarf ist mit ca. 8,5 MW um 12:45.

(2) $f''(t) = -\frac{2}{9} \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} + \left(-\frac{2}{9}t + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = \left(\frac{2}{81}t - \frac{7}{18}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} < 0$ für $0 \le t \le 12$: Der Graf ist über [0; 12] rechtsgekrümmt. Also ist f´ dort monoton fallend. Die größte Steigung ist also bei t = 0, die kleinste bei t = 12. Wegen $f'(0) = 1{,}5$ und $f'(12) = \left(-\frac{24}{9} + \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{4}{3}} \approx -0{,}31$. Die Betragsmäßig größte Steigung ist bei t = 0. Dort ändert sich der leistungsbedarf betragsmäßig am stärksten.

c) (1) $F(t) = -\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} \Rightarrow F'(x) = -18 \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} - \frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}$
$= -18 \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = (-18 + 2t + 22{,}5) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = (2t + 4{,}5) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t} = f(t)$.

(2) $\int_0^{12} f(t)dt = \left[-\frac{9}{2} \cdot (4t + 45) \cdot e^{-\frac{1}{9} \cdot t}\right]_0^{12} \approx 92{,}18$ [MWh]

(3) $\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)]dt \approx 11{,}4$: Das noch durch externe Energiequellen zu deckende Energiedefizit zwischen 6:15 und 13:44 beträgt 11,4 MWh. Über den gesamten Zeitraum beträgt das Energiedefizit $\int_0^{12} [f(t) - g(t)]dt \approx 4{,}1$ MWh.

(4) $\int_0^{12} [f(t) - k \cdot g(t)]dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^{12} f(t)dt \leq \int_0^{12} [k \cdot g(t)]dt \Leftrightarrow \int_0^{12} f(t)dt \leq k \cdot \int_0^{12} g(t)dt$
$\Leftrightarrow k \geq \frac{\int_0^{12} f(t)dt}{\int_0^{12} g(t)dt} \approx 5{,}66$.
Der Parameter muss mindestens k = 5,66 betragen, damit der Bedarf vom Windpark gedeckt werden kann.

Kontrollaufgaben

Aufgaben 1

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{2x+1} + 2x \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = (3 + 4x) \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f'(0) = 3e$
$f''(x) = 4 \cdot e^{2x+1} + (3 + 4x) \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = (10 + 8x) \cdot e^{2x+1} \Rightarrow f''(0) = 10e$

b) Graf ist an der Stelle 0 streng monoton steigend und linksgekrümmt.

Aufgaben 2

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2) \cdot e^{-x} = -\infty$: Graf müsste nach links unten verlaufen.
$f_2(-2) = 0$: Graf müsste bei $x = -2$ eine Nullstelle haben.

b) $\int_0^1 (e^{-2x} + 2x^3 + 5)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^4 + 5x\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} + 5 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{1}{2}e^{-2}$

Aufgaben 3

Zu zeigen: $f'(1) = t'(1) = 2 \cdot e$ und $t(1) = f(1) = 2e \cdot 1 - e = e$
Es gilt: $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2e$ und $f(1) = e^{1^2} = e$, was zu zeigen war.

Aufgaben 4

a) $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2$.

b) $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x = f(x)$; $G(x) = x^2 \cdot e^x + c$ und $G(1) = 2e$
$\Rightarrow 1^2 \cdot e^1 + c = 1 \Rightarrow c = 1 - e \Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + 1 - e$.

Aufgaben 5

Der Flächeninhalt des Rechtecks wird mit $A(x)$ bezeichnet.
$A(x) = -\ln(x) \cdot x \Rightarrow A'(x) = -\frac{1}{x} \cdot x + (-\ln(x)) \cdot 1 = -1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$
Wegen $\lim\limits_{x \to 1} A'(x) = A'(1) = -1$ und $\lim\limits_{x \to 0} A'(x) = \lim\limits_{x \to 0}[-1 - \ln(x)] = +\infty$ wechselt A' bei $x = e^{-1}$ das VZ von + nach -. Daher ist $x = e^{-1}$lokale Maximumstelle. Wegen $\lim\limits_{x \to 0} A(x) = \lim\limits_{x \to 1} A(x) = 0$ ist $x = e^{-1}$ sogar globale Extremstelle über $0 < x < 1$. Die Seitenlängen sind $x = e^{-1}$; $y = -\ln(e^{-1}) = -(-1) = 1$

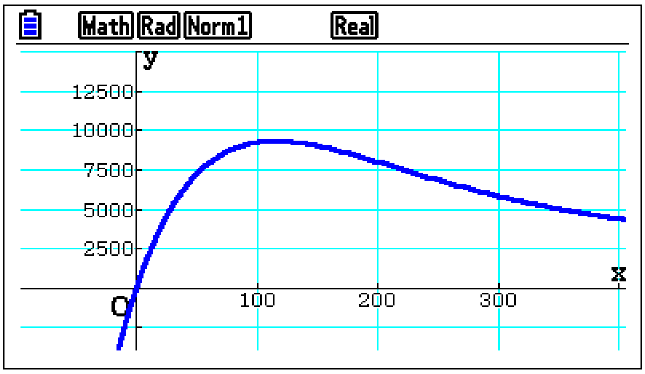
Aufgaben 6

$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x) \Rightarrow$ Graf von f ist achsensymmetrisch zur $y-$Achse
$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -e^{x^2} = -f(x) \Rightarrow$ Graf von f ist punktsymmetrischzum Ursprung
$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} \neq f(x)$ und $\neq -f(x) \Rightarrow$ Graf von f ist unsymmetrisch

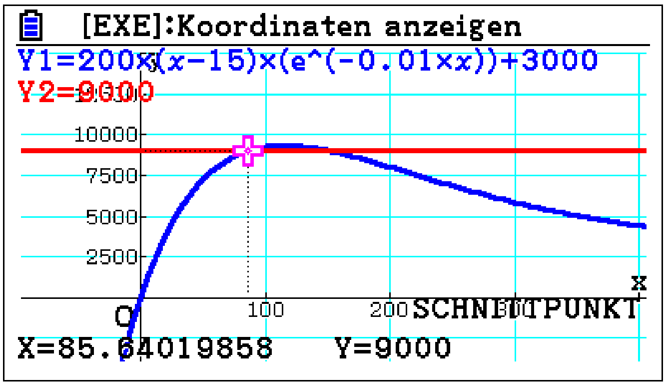
Aufgabe 7

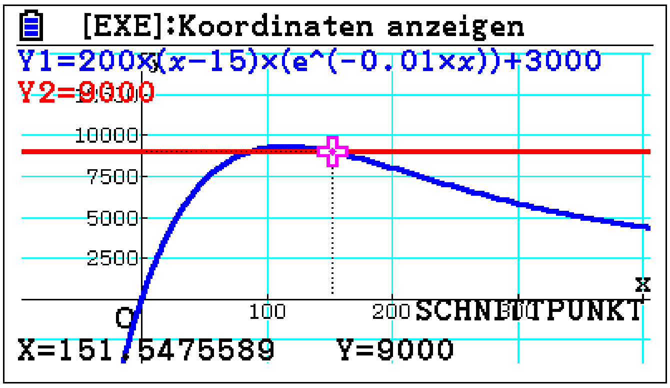
a) $f_{200}(9) = 200 \cdot (9 - 15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot 9} + 3000 \approx 1903$ Handy pro Tag entspricht der momentanen Verkaufsrate (= tägliche Verkaufszahl) am 9. Tag.

b)



c) $f_{200}(t) \geq 9000 \Leftrightarrow 85{,}64 \leq x \leq 151{,}55$ Etwa zwischen den 86. und dem 151. Tag sind die täglichen Verkaufszahlen größer als 9000 Handys pro Tag. (Über Menu 5 und den Schnittpunkt der beiden Grafen zu f und g mit g(x) = 9000)





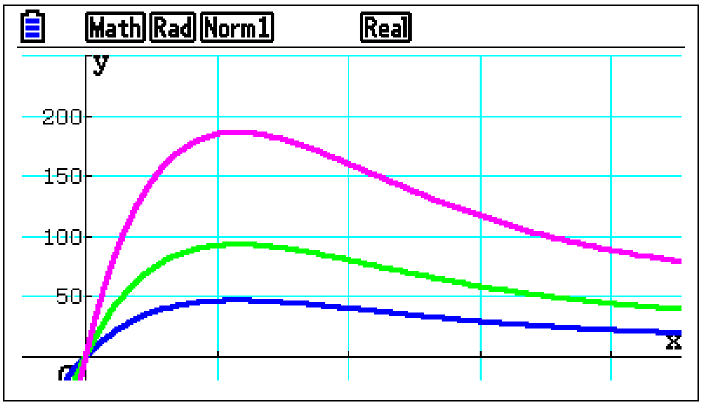
d) $f_{200}(t) = 200 \cdot (t-15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 3000$; Wende zunächst Produktregel und Summenregel an (anschließend auch auf den e-Term die Kettenregel):
$f_{200}'(t) = (230-2t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$; $f_{200}''(t) = (-4{,}3 + 0{,}02t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$; $f_{200}'(t) = (230-2t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} = 0$ $\Leftrightarrow 230 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 115$. $f_{200}''(115) = (-4{,}3 + 0{,}02 \cdot 115) \cdot e^{-0{,}01 \cdot 115} \approx -0{,}6 < 0$: 115 ist eine lokale Maximumstelle mit dem lokalen Maximum $f_{200}(115) = 200 \cdot (115-15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot 115} + 3000 \approx 9333$. Aufgrund des obigen Grafenverlaufs erkennt man, dass das Maximum sogar global ist (Randwerte liegen unter dem Maximum).

e) Das globale Maximum der ersten Ableitung ist gesucht. Da die einzige Wendestelle eine Rechts-Links-Wendestelle (dort ist die erste Ableitung lokal am kleinsten), erkennt man am Grafen, dass die Ableitung bei t = 0 am größten ist, da dort der Graf am steilsten ist.

f) $f_k(t) = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + k \cdot 15$; Wende zunächst Produktregel und Summenregel an. Der Unterschied zu oben ist nur der konstante Faktor vor dem Klammerausdruck. Also:
$f_k{}'(t) = k \cdot (1{,}15 - 0{,}01t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$; $f_k{}''(t) = k \cdot (-0{,}0215 + 0{,}0001t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$; Die Nullstellen von $f_k{}'$ sind offenbar die gleichen wie bei $f_{200}{}'$. Da k größer Null ist, ist auch $f_k{}''(115)$ negativ für jedes k. Damit ist 115 für jedes k die globale Maximumstelle.

g) Zu zeigen ist, dass $f_k{}'(t) = k \cdot (230 - 2t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} < 0$ für alle $t > 115$ (wenn die Ableitung über einem Bereich negativ ist, ist der Graph dort streng monoton fallend.). Da 230 – 2t für t > 155 negativ ist und k genauso wie der e-Term echt größer Null ist, ist das Produkt insgesamt negativ, was zu zeigen war.

h) Da der Faktor k den Funktionswert mit dem Term $(230 - 2t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$ multipliziert wird, wird der Graf der Funktion h mit $h(x) = (230 - 2t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$ von der t-Achse um den Faktor k > 0 in positive y-Richtung gestreckt.



i) $F'_k(t) = k \cdot (-100) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + k \cdot (-8500 - 100t) \cdot (-0{,}01) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 15 \cdot k$
$= k \cdot (-100 + 85 + t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 15k = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 15k = f_k(t)$

- $\int_0^{100} f_k(t)\,dt = [k \cdot (-8500 - 100t) \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} + 15 \cdot k \cdot t]_0^{100}$
  $= -18500 \cdot e^{-1} \cdot k + 1500 \cdot k - (-8500 \cdot k) = (10000 - 10000e^{-1}) \cdot k = (1 - e^{-1}) \cdot 10000 \cdot k$: Anzahl der Verkauften Handys in den ersten 100 Tagen.
- $\frac{1}{100-0} \cdot \int_0^{100} f_k(t)\,dt = (1 - e^{-1}) \cdot 100 \cdot k$: Durchschnittliche tägliche Verkaufszahl in den ersten 100 Tagen.
- $W(t) = \int_{115}^{t} f_k(x)\,dx$ ($t \geq 115$): Anzahl der verkauften Handys im Zeitraum t Tage nach dem 115. Tag.

Aufgabe 8

a) $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} = 0 \xLeftrightarrow[t \neq 0; e^{-x^2} > 0]{} x = 0 \Rightarrow f_t(0) = 0$. Also: $S_x\,(0/0)$ und $S_y\,(0/0)$.

b) $f_t(-x) = t(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -tx \cdot e^{-x^2} = -f_t(x)$: Achsensymmetrie.
$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ und $f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ (e-Term dominiert jeweils).

c) $F_t{}'(x) = \left(-\frac{t}{2}\right) \cdot \left(-2x \cdot e^{-x^2}\right) = tx \cdot e^{-x^2} = f_t(x)$ (Ketten- und Faktorregel)

d) $\int_0^a f_t(x)\,dx = \left[-\frac{t}{2} \cdot e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{t}{2} \cdot e^{-a^2} - \left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cdot e^{-a^2}$

e) $\int_0^a f_t(x)\,dx = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cdot e^{-a^2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} \frac{t}{2}$

f) $f_t{'}(x) = t \cdot e^{-x^2} + tx \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (t - 2tx^2) \cdot e^{-x^2}$
$f_t{''}(x) = (-4tx) \cdot e^{-x^2} + (t - 2tx^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (4tx^3 - 6tx) \cdot e^{-x^2} = 2t \cdot (2x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2}$.
Notwendige Bedingung: $f_t{''}(x) = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot (2x^3 - 3x) \cdot e^{-x^2} = 0 \underset{e^{-x^2}>0}{\Longleftrightarrow} 2x^3 - 3x = x \cdot (2x^2 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{1{,}5}$.
$f_t{''}(-2) < 0$; $f_t{''}(-1) > 0$; $f_t{''}(1) < 0$; $f_t{''}(2) > 0$: $x = -\sqrt{1{,}5}$ ist Re-Li-Wendestelle, x = 0 Li-Re-Wendestelle und $x = \sqrt{1{,}5}$ Re-Li-Wendestelle. Mit der Bestimmung der y-Werte erhält man für die Wendepunkte: W_1 (0/0), W_2 ($\sqrt{1{,}5}/\sqrt{1{,}5} \cdot t \cdot e^{-1{,}5}$) und W_3 ($-\sqrt{1{,}5}/-\sqrt{1{,}5} \cdot t \cdot e^{-1{,}5}$).

g) $g(x) = 4 \cdot e^{-1{,}5} \cdot x$

h) $A(a) = \frac{1}{2}a \cdot f_4(a) = \frac{1}{2}a \cdot 4a \cdot e^{-a^2} = 2a^2 \cdot e^{-a^2}$. Mit $A'(a) = (4a - 4a^3) \cdot e^{-a^2} = 0$ erhält man die Nullstellen von A´ durch $4a - 4a^3 = 0 \Leftrightarrow 4a \cdot (1 - a^2) = 0 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 1$. Mit $A'(0{,}5) > 0$; $A'(1{,}5) < 0$ (a = 1 ist lokale Maximumstelle von A) sowie $A(a) = 2a^2 \cdot e^{-a^2} \xrightarrow[a \to 0]{} 0$ und $A(a) = 2a^2 \cdot e^{-a^2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$ (e-Term dominiert) (Randwertbetrachtung) folgt, dass für a > 0 $A(1) = 2 \cdot e^{-1}$ globales Maximum von A ist.