Prüfung für Marcel Haag, Patricia Plasa und Sebastian Nickel

Teil I

Warschau – Vom Euro dürfen wir einiges erhoffen, doch in einem Punkt sollten wir ihm misstrauen. Wer eine Euro-Münze auf dem Tisch zum Kreiseln bringt, um nach dem Motto „Kopf oder Zahl“ eine wichtige (womöglich kostspielige) Entscheidung herbeizuführen, der sollte wissen, dass der Euro kein gerechter Richter ist. Das haben die polnischen Mathematiker Tomasz Gliszczynski und Waclaw Zawadowski herausgefunden. Verwandte aus Belgien hatten ihnen vor Weihnachten die ersten neuen Münzen mitgebracht. Gliszczynski, der an der Akademia Podlaska im ostpolnischen Siedlce Statistik lehrt, und seine Studenten warfen die Ein-Euro-Münze 250 Mal. 140 Mal zeigte sie den massigen Kopf des belgischen Königs Albert, nur 110 Mal die Zahl.

Bereite einen zehnminütigen Vortrag zu folgenden Aufgabenstellungen vor:

a) Wir gehen zunächst davon aus, dass der 1-€-Münzwurf fair ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 250 Würfen

(1) genau 125 Würfe auf der Kopfseite landen,
(2) mindestens 115 und höchstens 135 Würfe auf der Kopfseite landen,
(3) die Anzahl von Würfen, die auf der Kopfseite landen, um mindestens 10% vom Erwartungswert abweicht.

[2 + 3 + 4 = 9 Punkte]

b) Die Überprüfung der Aussage beide Mathematiker soll mittels eines beidseitigen Hypothesentests mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchsten 5 % betragen.

(1) Beschreibe einen passenden Hypothesentest. Begründe die Wahl der Nullhypothese und ermittle den Ablehnungsbereich.
(2) Berechne den Fehler der ersten Art und gib seine Bedeutung im obigen Sachzusammenhang an.

[5 + 3 = 8 Punkte]

c) Beurteile, inwiefern den Bedenken der beiden polnischen Mathematiker zuzustimmen ist.

[3 Punkte]

Quellenangabe:

Aufgabenidee nach www.mued.de/mued-material/lager/abdm/ab-17-08.pdf (abgerufen am 15.06.2018)

Lösungsvorschlag:

a) Sei X: „Anzahl der Münzwürfe, die auf der Kopfseite landen“ binomialverteilt mit n = 250 und der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,5. Es gilt:

(1) $P(X = 125) \approx 5{,}04\%$ (AF I = 2P)
(2) $P(115 \leq X \leq 135) \approx 81{,}60\%$ (AF I = 3P)
(3) $\mu = 125;\ P(X \leq 112) + P(X \geq 138) = 1 - P(113 \leq X \leq 137) \approx 11{,}37\%$ (AF I = 4P)

b) **(Beidseitiger) Hypothesentest**

(1) Man möchte die **Nullhypothese** H_0: p = 0,5 („Kopf- und Zahlseite sind gleich häufig.“) verwerfen und die **Alternativhypothese** H_A: p < 0,5 oder p > 0,5 („Die Kopfseite liegt beim Münzwurf seltener oder häufiger oben als die Zahlseite.“) annehmen. **Begründung**: Man verwirft die Nullhypothese, falls die Anzahl der Münzwürfe mit der Kopfseite deutlich unter oder über dem Erwartungswert liegt. Dann kann davon ausgegangen werden, dass der Münzwurf unfair ist und die Kopfseite weniger häufig oder häufiger geworfen wird wie die Zahlseite. Unter Zuhilfenahme der Tabellenfunktion wird die kleinste Zahl x gesucht, so dass $P(X \leq x) = \text{BinomialCD}(0, x, 250{,}0.5) \geq 0{,}025$ sowie die kleinste Zahl y mit $P(X \leq y) = \text{BinomialCD}(0, y, 250{,}0.5) \geq 0{,}975$. Man erhält den Annahmebereich A = [110; 240] und **Verwerfungsbereich V = [0, 109] ∪ [141; 250],** denn $P(X \leq 109) \approx 2{,}48\%$, $P(X \leq 110) \approx 3{,}32\%$ und $P(X \leq 139) \approx 96{,}68\%$, $P(X \leq 140) \approx 97{,}51\%$. (AF II = 5P)

(2) Der **Fehler 1. Art** beträgt $P(X \leq 109) + P(X \geq 141) \approx 2{,}48\% + 2{,}49\% = 4{,}97\%$. **Bedeutung im Sachkontext**: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,97% nimmt man irrtümlich an, dass die Kopfseite weniger häufig oder häufiger geworfen wird, obwohl der Münzwurf fair ist. (AF II = 3P)

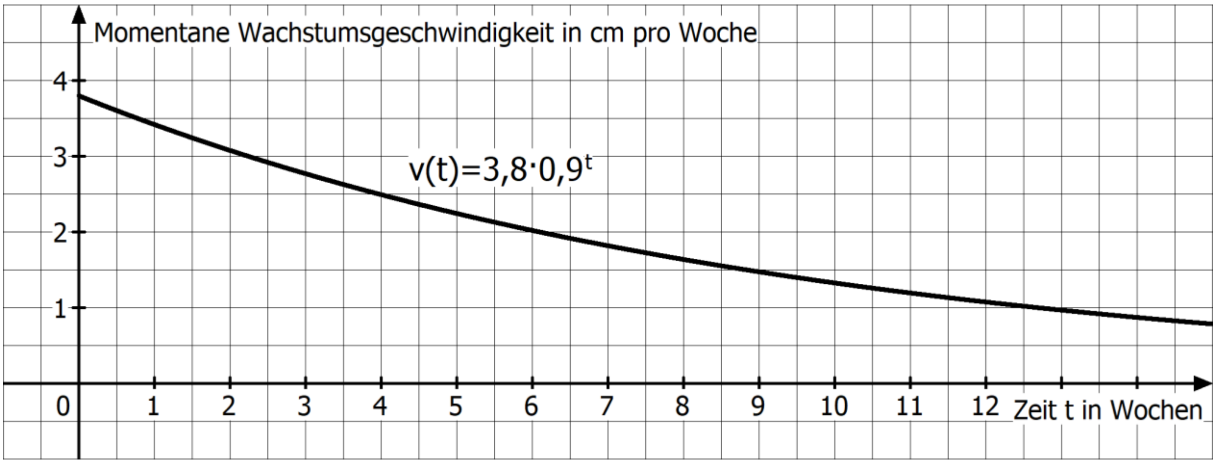
c) 110 liegt im Annahmebereich. Daher muss die Alternativhypothese verworfen und die Nullhypothese angenommen werden. Die Bedenken der beiden Mathematiker wären damit nicht gerechtfertigt. Da die Entscheidung sehr knapp ist, sollten weitere Experimente mit größerem n durchgeführt werden. (AF III = 3P)

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	2	3	4	5	6
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

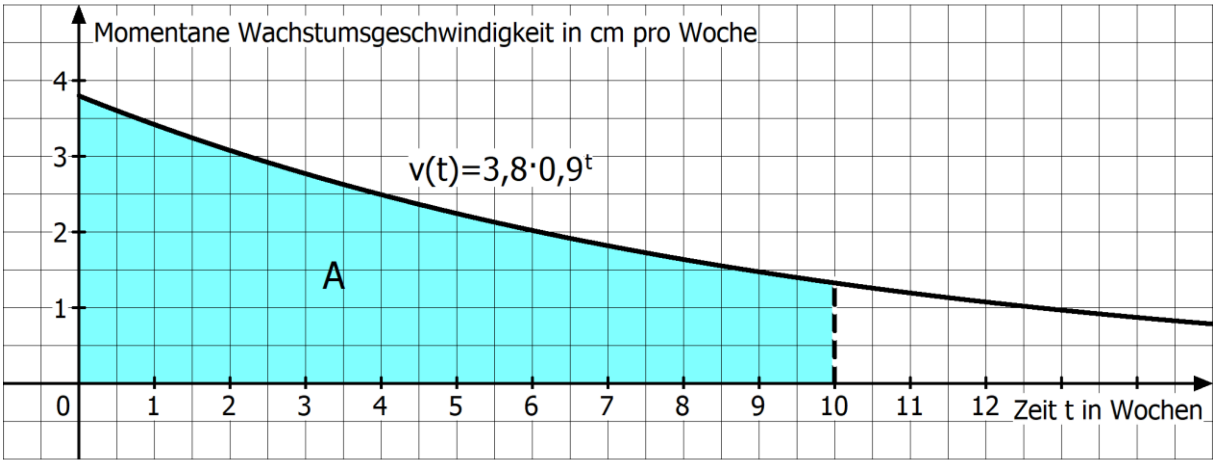
Teil II:

Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (in cm pro Woche) kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden: $\mathbf{v(t) = 3{,}8 \cdot 0{,}9^{t}}$. Dabei gibt t die Anzahl der Wochen seit dem Einpflanzen der Pflanze an. Zu Beginn bei t = 0 war die Pflanze 10 cm hoch. Der Graf ist im Folgenden angegeben.



Teil II:

Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (in cm pro Woche) kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden: $\mathbf{v(t) = 3{,}8 \cdot 0{,}9^t}$. Dabei gibt t die Anzahl der Wochen seit dem Einpflanzen der Pflanze an. Zu Beginn bei t = 0 war die Pflanze 10 cm hoch. Der Graf ist im Folgenden angegeben.



a) **Bestimme** den Zeitpunkt, nach dem sich die Wachstumsgeschwindigkeit halbiert hat. [AF I = 4 Punkte]

$3{,}8 \cdot 0{,}9^t = 1{,}9 \Leftrightarrow 0{,}9^t = 0{,}5 \Leftrightarrow t = \log_{0,9}(0{,}5) \approx 6{,}58$. Nach ca. 6,5 Wochen hat sich die Wachstumsgeschwindigkeit auf die Hälfte halbiert.

b) **Interpretiere** das Integral $\int_0^t v(x)\,dx$ im Sachkontext. [AF I = 2 Punkte]

Das integral beschreibt den Längenzuwachs nach t Wochen.

c) **Berechne** mithilfe der Funktion v die zu erwartende Höhe der Pflanze 10 Wochen nach dem Einpflanzen. [AF I/II = 8 Punkte]

Die Länge der Pflanze nach 10 Wochen kann beschrieben werden durch die Summe aus Ausgangslänge und Längenzuwachs (Fläche A): Daher gilt für diese Länge:

$$10 + \int_0^{10} v(t)\,dt = 10 + \left[3{,}8 \cdot \frac{1}{\ln(0{,}9)} \cdot 0{,}9^t\right]_0^{10} = 10 + \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \cdot 0{,}9^{10} - \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \approx 33{,}5 \text{ [cm]}$$

d) **Ermittle** die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit innerhalb der ersten 10 Wochen. [AF II = 3 Punkte]

$$\frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} v(t)\,dt \approx 2{,}35 \text{ [cm pro Woche]}$$

e) **Zeige,** dass der langfristige Längenzuwachs endlich ist. [AF III = 5 Punkte]

$$\int_0^{+\infty} v(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \cdot 0{,}9^R - \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)}\right) = \frac{3{,}8}{\ln(0{,}9)} \approx 36{,}07 \text{ [cm]}.$$

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5