Prüfung für Milena Micic, Frederik Gnaß und Felix Füermann

Teil I

Vor dem Anpfiff eines Fußballspiels entscheidet der Münzwurf durch den Schiedsrichter darüber, wer die Seiten wählen darf (der Gewinner) und wer Anstoß hat. Doch ist diese Entscheidung fair? Bereits kurz nach der Einführung der Euro-Münzen gab es den Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit von *Kopf* und *Zahl* wegen der unterschiedlichen Gewichtsverteilung auf den beiden Seiten nicht gleich sei. Ein Professor für Statistik behauptet, dass *Kopf* zumindest bei einigen Euro-Münzen weniger häufig oben läge, weil die Kopfseite schwerer sei. Eine 1€-Münze wird nun 250 mal geworfen.

Bereite einen zehnminütigen Vortrag zu folgenden Aufgabenstellungen vor:

a) Wir gehen zunächst davon aus, dass der 1-€-Münzwurf fair ist.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 250 Würfen

(1) genau 125 Würfe *Kopf* zeigen,
(2) mindestens 115 und höchstens 135 Würfe *Kopf* zeigen,
(3) die Anzahl von Würfen mit *Kopf* um mindestens 10% vom Erwartungswert abweicht.

[2 + 3 + 4 = 9 Punkte]

b) Die Überprüfung der Aussage des Statistik-Professors soll mittels linkseitigem Hypothesentest erfolgen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dabei höchsten 5 %.

(1) Entwickle einen passenden linksseitigen Hypothesentest. Begründe die Wahl der Nullhypothese und ermittle den Ablehnungsbereich.
(2) Berechne den Fehler der ersten Art und gib seine Bedeutung im obigen Sachzusammenhang an.

[5 + 3 = 8 Punkte]

c) Beurteile die Aussage des Statistik-Professors, falls von 250 Versuchen, 110 Würfe *Kopf* zeigten.

[3 Punkte]

Quellenangabe:

Aufgabenidee nach www.mued.de/mued-material/lager/abdm/ab-17-08.pdf (abgerufen am 15.06.2018)

Lösungsvorschlag:

a) Sei X: „Anzahl der Münzwürfe, die auf *Kopf* landen" binomialverteilt mit n = 250 und der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,5. Es gilt:

(1) $P(X = 125) \approx 5{,}04\%$ (AF I = 2P)
(2) $P(115 \leq X \leq 135) \approx 81{,}60\%$ (AF I = 3P)
(3) $\mu = 125;\ P(X \leq 112) + P(X \geq 138) = 1 - P(113 \leq X \leq 137) \approx 11{,}37\%$
(AF I = 4P)

b) **(Linksseitiger) Hypothesentest**

(1) Man möchte die **Nullhypothese** H_0: p = 0,5 („Münzwurf ist fair.") verwerfen und die **Alternativhypothese** H_A: p < 0,5 („Münzwurf ist unfair – *Kopf* wird weniger häufig geworfen.") annehmen. **Begründung**: Man verwirft die Nullhypothese, falls die Anzahl der Münzwürfe mit *Kopf* deutlich unter dem Erwartungswert liegt. Dann kann davon ausgegangen werden, dass der Münzwurf unfair ist und *Kopf* weniger häufig geworfen wird wie *Zahl*. Unter Zuhilfenahme zum Beispiel der Tabellenfunktion wird die größte Zahl x gesucht, so dass $P(X \leq x) = \text{BinomialCD}(0, x, 250, 0.5) \leq 0{,}05$. Die Zahl $x = 111$ gibt die obere Grenze des **Ablehnungsbereichs** [0; 111] an, denn es gilt $P(X \leq 111) \approx 4{,}37\%$ und $P(X \leq 112) \approx 5{,}68\%$. (AF II = 5P)
(2) Der **Fehler 1. Art** beträgt $P(X \leq 111) \approx 4{,}37\ \%$.
Bedeutung im Sachkontext: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,37% nimmt man irrtümlich an, dass *Kopf* weniger häufig geworfen wird, obwohl der Münzwurf fair ist. (AF II = 3P)

c) Auf einem Signifikanzniveau von 5% hat der Statistik-Professor recht, da 110 im Verwerfungsbereich liegt. Da die Entscheidung sehr knapp ist, sollten weitere Experimente mit größerem n durchgeführt werden. (AF III = 3P)

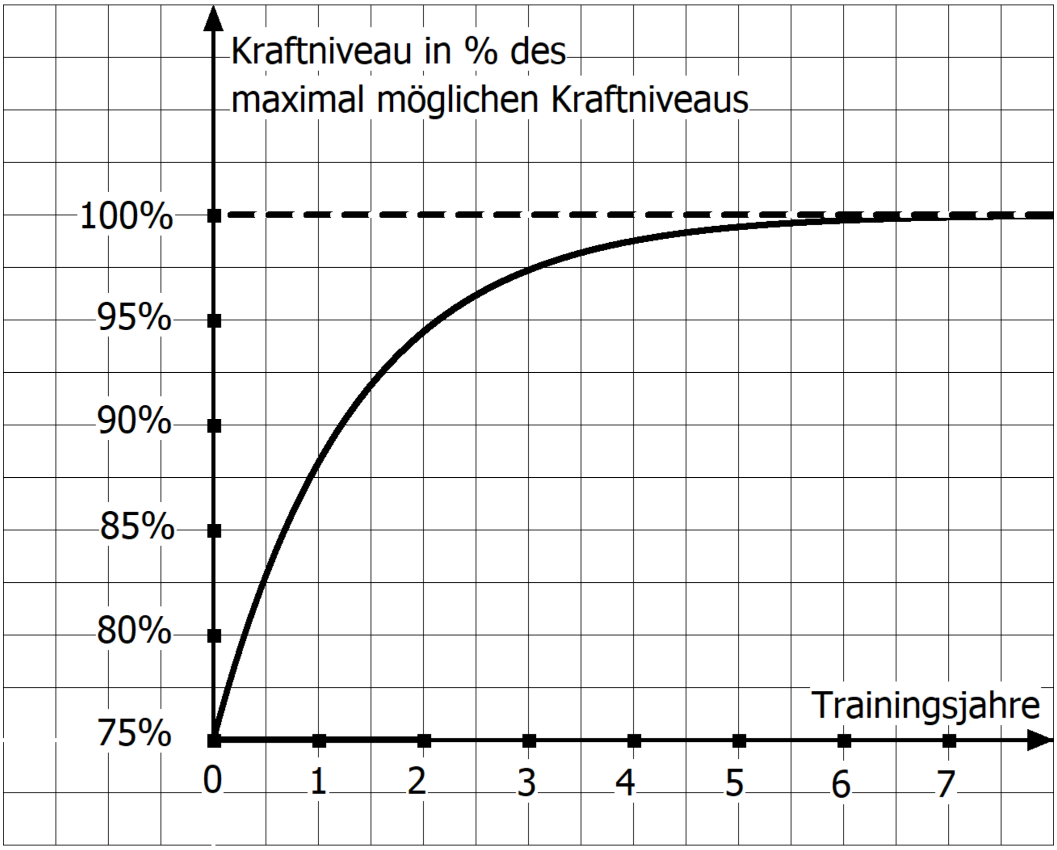
Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5

Teil II:

Das **Gesetz zum Verlauf der Leistungsentwicklung** besagt, dass der Leistungsanstieg umso größer ist, je untrainierter der Sportler ist. Die Form eines Athleten kann nicht ins Unendliche steigen, sondern ist durch eine natürliche Grenze begrenzt.

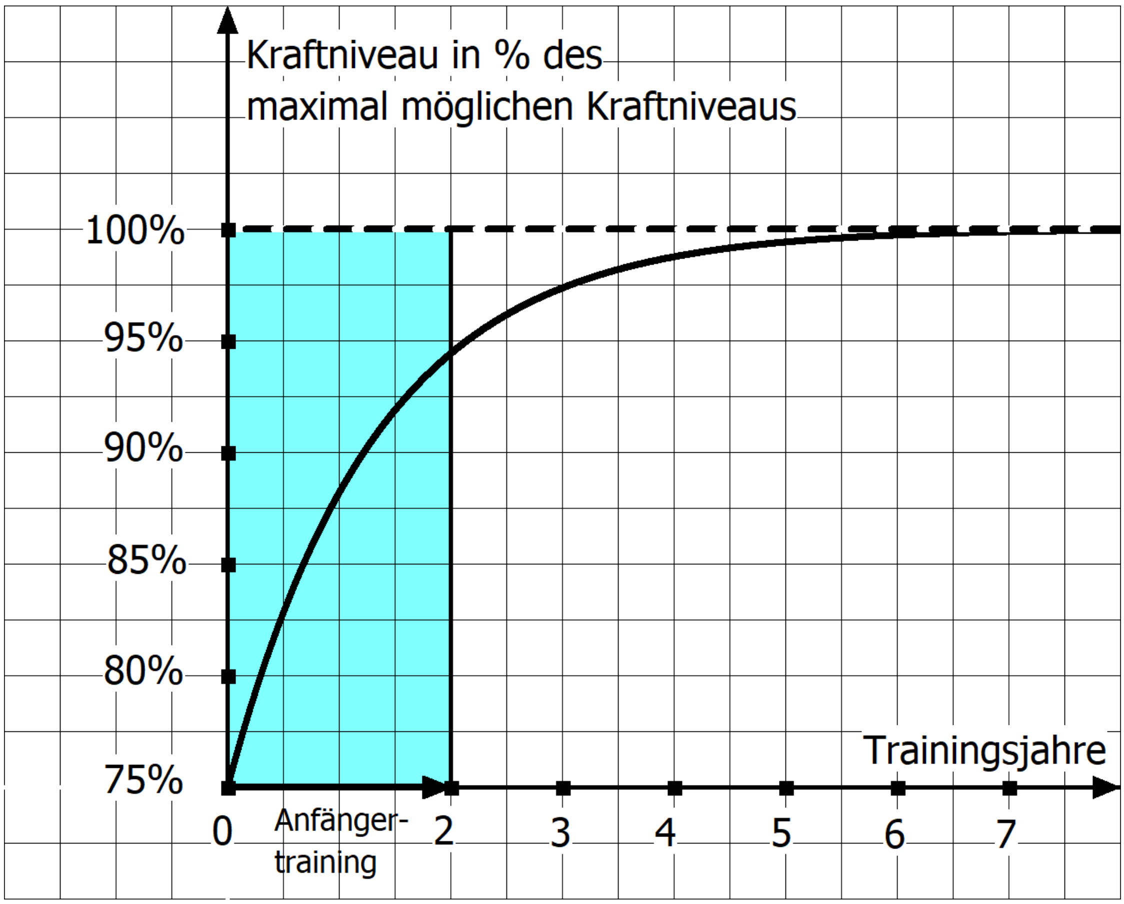
Die folgende Abbildung beschreibt die **Zunahme des Kraftniveaus** (in % des maximal möglichen Kraftniveaus) bei einem zielgerichteten Krafttraining in Abhängigkeit von der Trainingsdauer (in Trainingsjahren).



Das **Gesetz zum Verlauf der Leistungsentwicklung** besagt, dass der Leistungsanstieg umso größer ist, je untrainierter der Sportler ist. Die Form eines Athleten kann nicht ins Unendliche steigen, sondern ist durch eine natürliche Grenze begrenzt.

Die folgende Abbildung beschreibt die **Zunahme des Kraftniveaus** (in % des maximal möglichen Kraftniveaus) bei einem zielgerichteten Krafttraining in Abhängigkeit von der Trainingsdauer (in Trainingsjahren).

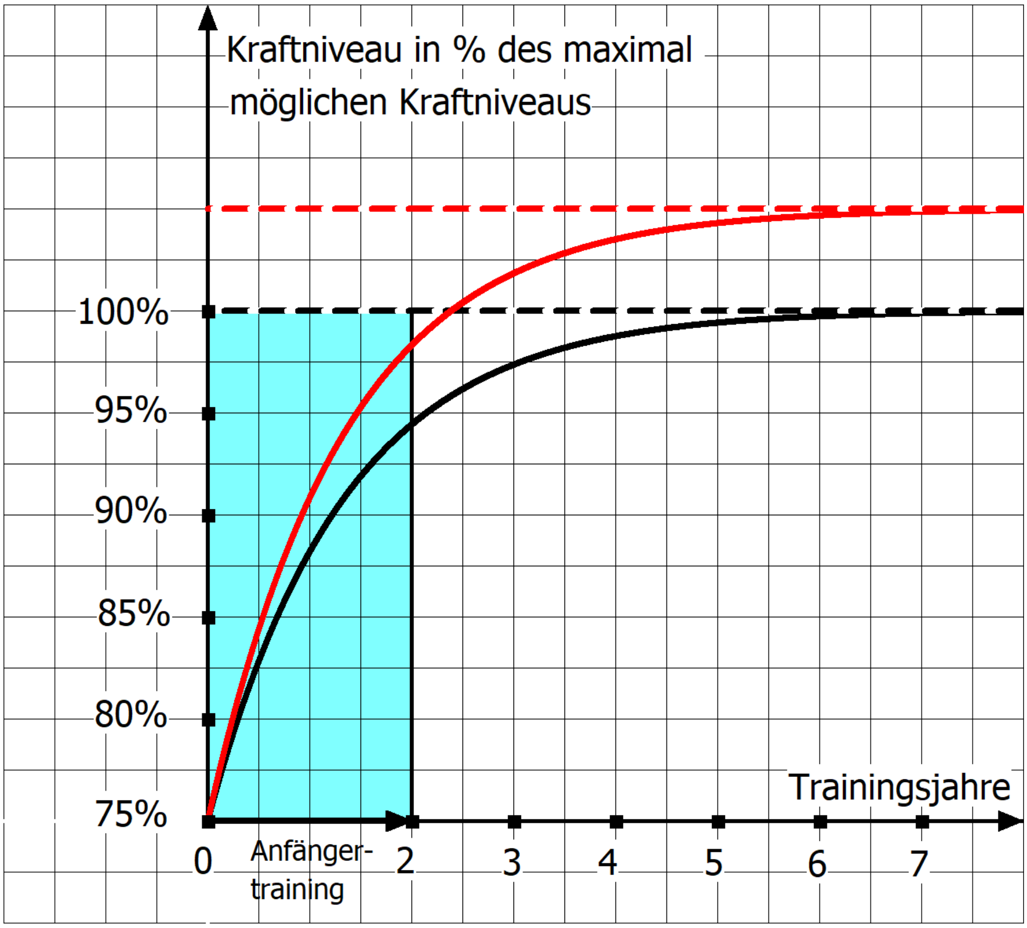
$$\mathbf{f(t) = 1 - 0,25 \cdot e^{-075t}}$$



Das **Gesetz zum Verlauf der Leistungsentwicklung** besagt, dass der Leistungsanstieg umso größer ist, je untrainierter der Sportler ist. Die Form eines Athleten kann nicht ins Unendliche steigen, sondern ist durch eine natürliche Grenze begrenzt.

Die folgende Abbildung beschreibt die **Zunahme des Kraftniveaus** (in % des maximal möglichen Kraftniveaus) bei einem zielgerichteten Krafttraining in Abhängigkeit von der Trainingsdauer (in Trainingsjahren).

$$\mathbf{f(t) = 1 - 0,25 \cdot e^{-075t}}$$



Quellenangabe:

Modifiziert nach Weineck, J. (2010): *Optimales Training*. Balingen: Spitta, S. 407. Das Kraftniveau bezieht sich auf die Entwicklung der Reaktivkraft.

Aufgabenstellungen mit Lösungsvorschlag:

a) **Erläutere** anhand der Kurve zum Kraftniveau das Gesetz zum Verlauf der Leistungsentwicklung. [AF I = 3 Punkte]

Das Kraftniveau startet bei 75% (Ausgangstrainingszustand), steigt zunächst sehr schnell an (Anfängertraining), nimmt im Laufe des Trainings immer langsamer zu und nähert sich einer Sättigungsgrenze von 100% (maximal mögliches Kraftniveau) an. Der Kraftanstieg eines Anfängers ist also deutlich höher als der eines Fortgeschrittenen.

b) **Leite** eine mögliche Funktionsgleichung **her.** [AF II = 4 Punkte]

Das Kraftniveau nimmt im Laufe des Trainings immer langsamer zu und nähert sich einem maximal möglichen Kraftniveau. Es könnte sich daher um ein nach oben beschränktes exponentielles Wachstum der Form $f(t) = S - \big(S - f(0)\big) \cdot e^{-kt}$ handeln. Dabei gilt S = 1, f (0) = 0,75 und k > 0. Also: $f(t) = 1 - 0{,}25 \cdot e^{-kt}$. Durch Einsetzen von Koordinaten eines Grafenpunktes ließe sich k bestimmen (muss nicht ausgeführt werden).

c) Sei f gegeben durch $f(t) = 1 - 0{,}25 \cdot e^{-075t}$. **Untersuche rechnerisch**, welches Kraftniveau am Ende des Anfängertrainings erreicht wird und nach welcher Zeit ein Kraftniveau von 99% des maximal möglichen Niveaus erreicht wird. [AF II = 4 Punkte]

$f(2) = 1 - 0{,}25 \cdot e^{-1{,}5} \approx 94{,}42\%.\ f(t) = 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}25 \cdot e^{-075t} = 0{,}99$
$\Leftrightarrow 0{,}25 \cdot e^{-075t} = 0{,}01 \Leftrightarrow e^{-0{,}75t} = 0{,}04 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3} \cdot \ln(0{,}04) \approx 4{,}29$

d) **Berechne** f´(t) und **interpretiere** den Term. **Weise** mittels f´(t) nach, dass der Leistungsanstieg umso größer ist, je untrainierter der Sportler ist. [AF I/III = 6 Punkte]

Es gilt $f'(t) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot e^{-075t} = \frac{3}{16} \cdot e^{-075t}$. Der Anstieg des Kraftniveaus wird durch die erste Ableitung f´(t) beschrieben. Für großes t strebt f´(t) gegen null.

e) Ein zweiter Graf stellt einen möglichen Verlauf des gleichen Sportlers dar. **Erkläre**, wie es zu dem veränderten Verlauf gekommen sein könnte und wie der Funktionsterm f verändert werden muss, damit man den Funktionsterm der zweiten Grafen erhält. [AF II/III = 3 Punkte]

Es könnten neue Trainingsverfahren oder Doping angewendet worden sein. Daher ändert sich die Sättigungsgrenze von 1 auf 1,05 und das Sättigungsmanko zu Beginn von 0,25 auf 0,3: $g(t) = 1{,}05 - 0{,}30 \cdot e^{-075t}$.

Darstellungsleistung: 5P (1 = 5P, 2 = 4P, 3 = 3P, 4 = 2P, 5 = 1P, 6 = 0P)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
25-21	20-17	16-13	12-10	9-5	< 5