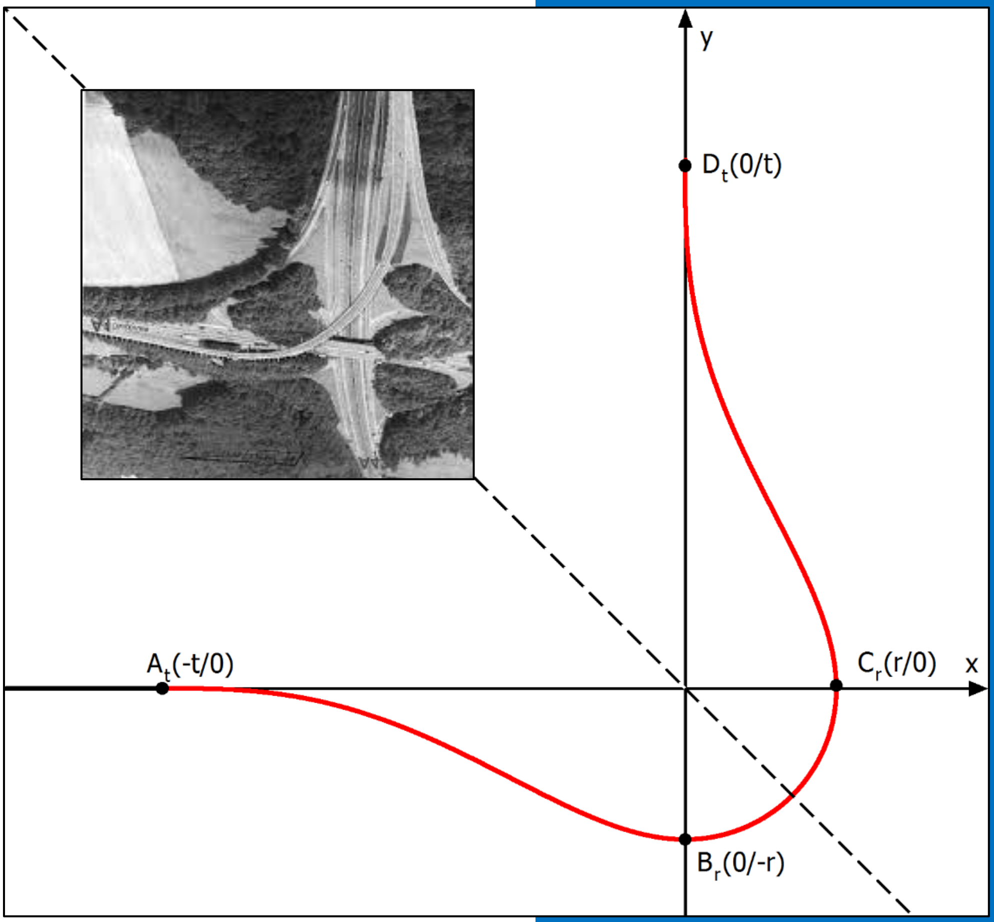
2. Unterrichtsvorhaben in der Q1-Phase

Funktionsgleichungen finden



Jörn Meyer
j.meyer@fals-solingen.de
www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Noch fit? – Funktionsuntersuchung mit Steigung und Krümmung

Wichtige Merksätze der E-Phase und Wichtiges zur Krümmung

Satz zur Monotonie

(1) **Wenn** $f´(x) > 0$ für alle x eines Intervalls ist,

dann ist der Graf von f über I **streng monoton zunehmend (wachsend).**

(2) **Wenn** $f´(x) < 0$ für alle x eines Intervalls I ist,

dann ist der Graf von f über I **streng monoton abnehmend (fallend).**

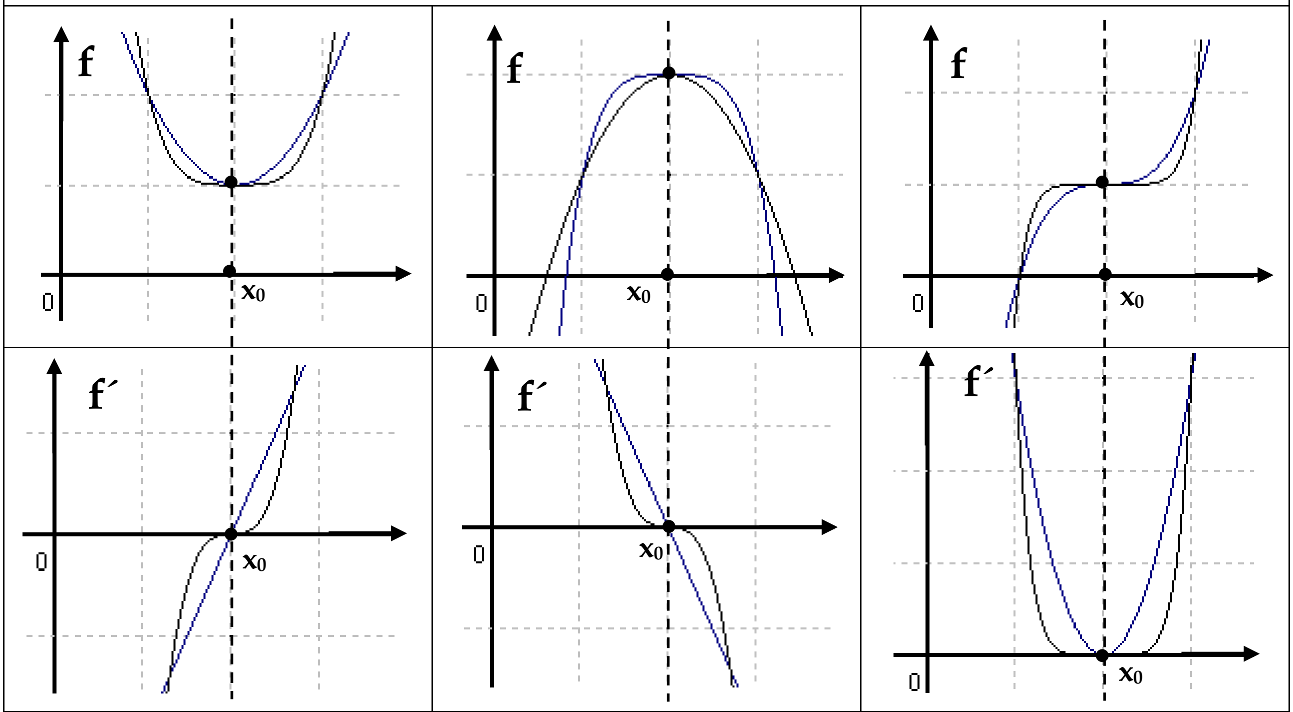
Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen: $f´(x_0) = 0$

Wenn an der Stelle x_0 eine lokale Extremstelle vorliegt, **dann** gilt: $\mathbf{f´(x_0) = 0}$.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht.**

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen: $f´(x_0) = 0 \wedge f´$ hat bei x_0 einen VZW



Wenn $f´(x_0) = 0$ **und** $f´$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **– nach +** hat, **dann** ist x_0 eine **lokale Minimumstelle** von f.	**Wenn** $f´(x_0) = 0$ **und** $f´$ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **+ nach –** hat, **dann** ist x_0 eine lokale **Minimumstelle** von f.	**Wenn** $f´(x_0) = 0$ **und** $f´$ an der Stelle x_0 **keinen** Vorzeichenwechsel hat, **dann** ist x_0 eine **Sattelstelle** von f.

Die Umkehrungen der hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen gelten **nicht.**[1]

[1] Es lassen sich Gegenbeispiele von Funktionen angeben mit einer Extremstelle ohne VZW von $f´$.

Es lässt sich folgende Variante für die **hinreichende Bedingung für Extremstellen** formulieren:

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen: $f'(x_0) = 0$

<u>**Wenn**</u> **$f'(x_0) = 0$ und** $f''(x_0) \begin{Bmatrix} > \\ > \end{Bmatrix}$ **0** ist, <u>**dann**</u> ist x_0 eine lokale $\begin{Bmatrix} \textbf{Minimumstelle} \\ \textbf{Maximumstelle} \end{Bmatrix}$ von f.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht.**

Krümmung und Wendestelle

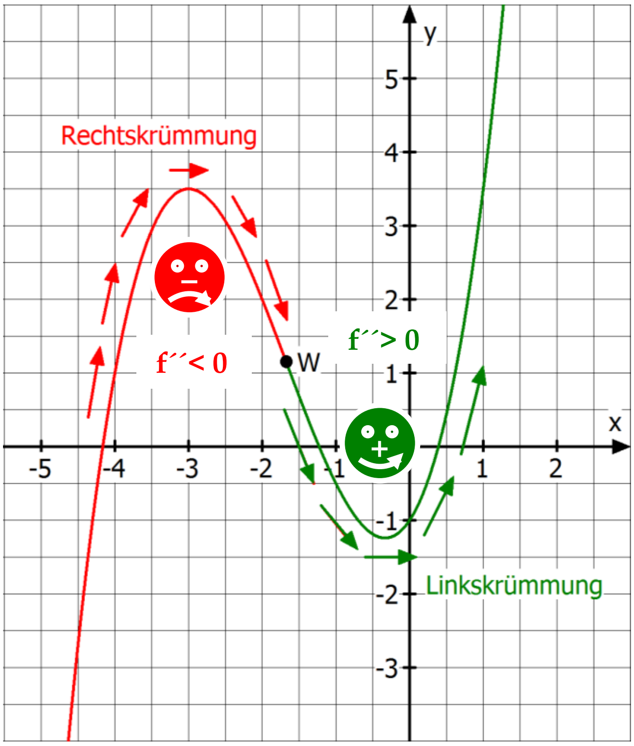
Ist **$f''(x) < 0$** für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **rechtsgekrümmt**. Dabei ist **f´** auf I **streng monton fallend**. Die Steigungen des Grafen von f nehmen auf dem Intervall I also stetig ab.

Ist **$f''(x)$** > 0 für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **linksgekrümmt.** Dabei ist **f´** auf I **streng monton wachsend**. Die Steigungen des Grafen von f nehmen auf dem Intervall I also stetig zu.

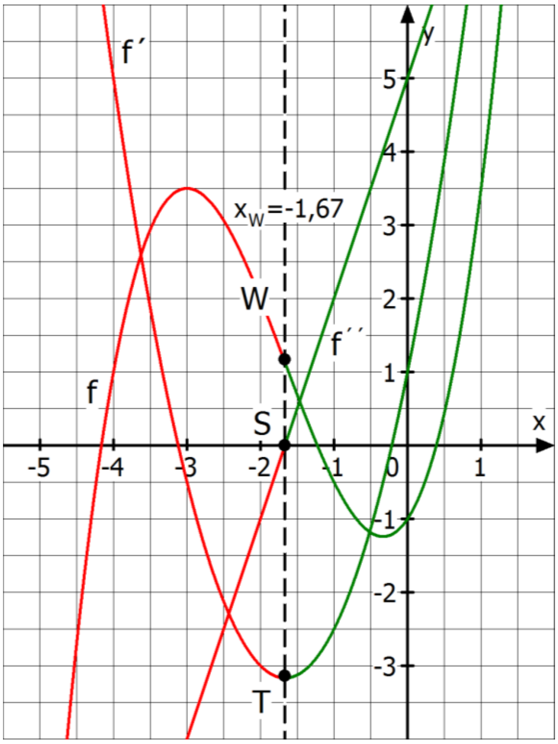
Eine **Wendestelle x_W** ist eine Stelle, an denen ein Krümmungswechsel vorliegt. Dort wechselt die Ableitung von f´ sein Vorzeichen. Daher gilt dort: **$f''(x_W) = 0$.**

Merke: Der Punkt W, in dem sich das Krümmungsverhalten ändert, wird als **Wendepunkt** bezeichnet. Die **Wendestelle x_W** (= x-Wert des Wendepunktes) ist eine lokale Extremstelle der ersten Ableitung und gleichzeitig eine Nullstelle der zweiten Ableitung.

Folgende Abbildungen verdeutlichen den Sachverhalt:



Merke: Am Wendepunkt W liegt ein Krümmungswechsel vor. Die Wendestelle von f ist Extremstelle von f´ und Nullstelle von f ´´.



f´´ < 0 ☹
f´ ist monoton fallend
f ist rechtsgekrümmt

f´´ > 0 ☺
f´ ist monoton steigend
f ist linksgekrümmt

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x_0) = 0$

<u>**Wenn**</u> an der Stelle x_0 eine Wendestelle vorliegt, <u>**dann**</u> gilt $\mathbf{f''(x_0) = 0}$.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f'(x_0) = 0$ und VZW von f'' bei x_0

<u>**Wenn**</u> $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ und $\mathbf{f''}$ an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel** von $\left\{\begin{matrix} -\ \textbf{nach}\ + \\ +\ \textbf{nach}\ - \end{matrix}\right\}$ hat,

<u>**dann**</u> ist x_0 eine $\left\{\begin{matrix} \textbf{Rechts} - \textbf{Links} - \textbf{Wendestelle} \\ \textbf{Links} - \textbf{Rechts} - \textbf{Wendestelle} \end{matrix}\right\}$ Wendestelle von f.

Es gilt auch folgende Variante für die hinreichende Bedingung für Wendestellen:

<u>**Wenn**</u> $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ **und** $\mathbf{f'''(x_0)} \left\{\begin{matrix} > \\ > \end{matrix}\right\} \mathbf{0}$ ist, <u>**dann**</u> ist x_0 eine $\left\{\begin{matrix} \textbf{Rechts} - \textbf{Links} - \textbf{Wendestelle} \\ \textbf{Links} - \textbf{Rechts} - \textbf{Wendestelle} \end{matrix}\right\}$ von f.

Aufgabe 1: Vollständige Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben sei die ganzrationale Funktion dritten Grades mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$.

a) **Untersuche** den Grafen der Funktion f auf Symmetrie.

b) **Beschreibe** das Verhalten im Unendlichen und nahe Null.

c) **Berechne** ohne GTR alle Schnittpunkte des Grafen von f mit den Koordinatenachsen.

d) **Ermittle** alle lokalen Hoch- und Tiefpunkte des Grafen von f.

e) **Untersuche** den Grafen von f auf sein Krümmungsverhalten.

f) **Skizziere** den Grafen von f zunächst ohne GTR und **überprüfe** anschließend Deine Ergebnisse mit dem GTR.

g) **Führe** eine vollständige Kurvenuntersuchung auch für die nachfolgenden Funktionen **durch**.

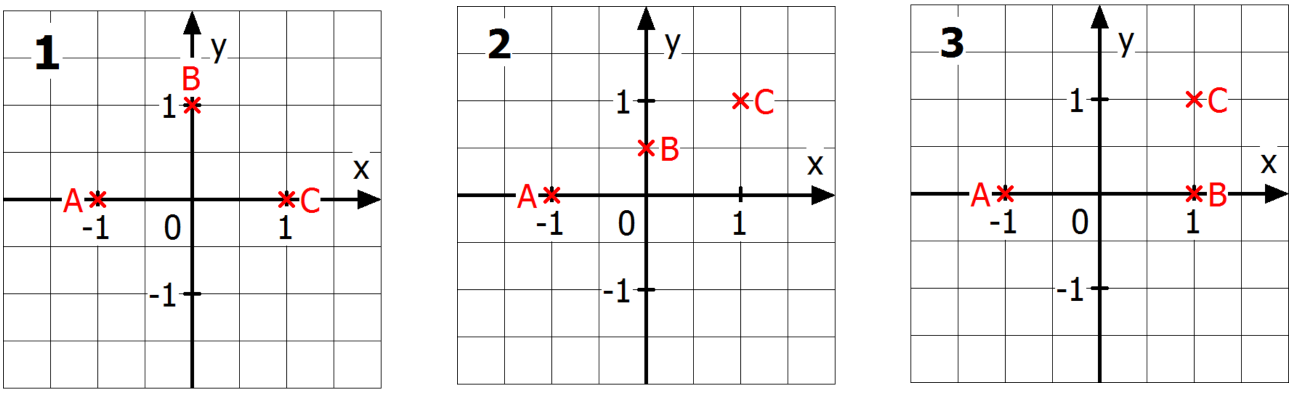
(1) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ (2) $f(x) = x^4 - x^3$ (3) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

Überprüfe anschließend mit dem GTR.

2 Ganzrationale Funktionen bestimmen

Aufgabe 1: Funktionsbestimmung bei Vorgabe von 3 Punkten[2]

Im Folgenden sind drei Abbildungen gegeben, bei denen jeweils 3 Punkte eingezeichnet sind. **Untersuche**, für welche Abbildungen ein Graph einer ganzrationalen Funktion ersten und zweiten Grades gefunden werden kann, der durch die 3 Punkte verläuft. **Gib** – wenn möglich – die Funktionsgleichung **an**.



Aufgabe 2: Steckbriefe von Funktionen

Der Begriff **„Steckbriefaufgaben“** beschreibt Aufgabentypen, bei denen Funktionsgleichungen von Funktionen bestimmt werden sollen, über die bestimmte Informationen vorliegen. Die Zahl der Informationen kann genau ausreichend sein (eindeutig bestimmter Steckbrief), es können zu wenig Informationen angegeben sein (unterbestimmter Steckbrief) oder auch zu viele (überbestimmter Steckbrief).

Es sind folgende sechs Steckbriefe von Funktionen angegeben. **Bestimmt** möglichst viele Funktionsgleichungen. **Notiert** eure Strategien.

1 **Gerade**: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte A(7,5/5,5) und B(3,5/-4,5).

2 **Parabel**: Der Graf einer quadratischen Funktion hat bei A(0/2) einen Hochpunkt und verläuft durch den Punkt B(6/-1).

3 **Parabel durch 3 Punkte:** Der Graf einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A(0/2), B(6/-1) und C(1/4).

4 **Funktion vom Grad 3:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat in T(0/0) einen Tiefpunkt und in H(4/4) einen Hochpunkt.

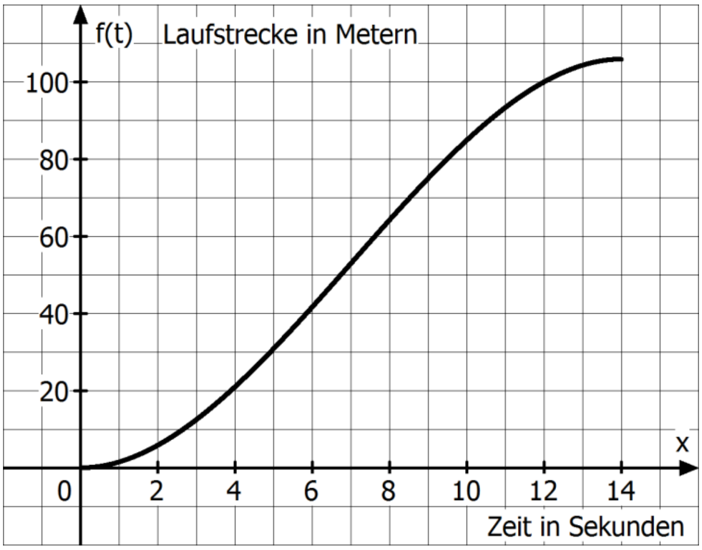
5 **Symmetrischer Graf:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 ist symmetrisch zur y-Achse, hat in H(2/-2) einen Hochpunkt und in T(0/-3) einen Tiefpunkt.

6 **Wendepunkt im Ursprung:** Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und in T(1/-1) einen Tiefpunkt.

[2] Idee aus: Lambacher Schweizer, Q-Phase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 3: Modellfunktion für den 100-m-Sprint bestimmen

Der Weg-Zeit-Verlauf des 100 m Sprint eines Schülers ist in folgender Abbildung dargestellt.



Es handelt sich dabei um den Graph einer Funktion 3. Grades mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c und d sind reelle Zahlen) und den folgenden Eigenschaften:

(I) Der Graph verläuft durch (0/0)
(II) 0 ist lokale Minimumstelle.
(III) Der Graph ist bei x = 7 am steilsten.
(IV) Der Graph geht durch (12/100).

a) **Begründe**, dass man 4 Bedingungen zur Bestimmung von f(x) benötigt und **markiere** im Graphen die oben beschriebenen Eigenschaften (I) bis (IV).

b) **Stelle** mithilfe der Terme für f(x), f´(x) und f´´(x) vier Bedingungen **auf**, die man aus den Eigenschaften (I) bis (IV) erhält. **Fülle** dazu die folgenden Lücken **aus**.

(I) $f(0) = \square$ (II) $f'(\square) = \square$ (III) $f''(\square) = \square$ (IV) $f(\square) = 100$

c) **Leite** nun f(x) zweimal **ab**. **Fülle** dazu die Lücken **aus**.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + \square + \square$ $f''(x) = \square$

d) **Wende** die Bedingungen (I) bis (IV) auf die Funktionsgleichungen für f(x), f´(x) und f´´(x) **an**.

(I) $f(0) = \square \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = \square \Leftrightarrow d = \square$

(II) $f'(\square) = \square \Leftrightarrow 3a \cdot \square + \square + \square = \square \Leftrightarrow c = \square$

(III) $f''(\square) = \square \Leftrightarrow 6a \cdot \square + 2b = \square \Leftrightarrow \square \cdot a + 2b = \square$

(IV) $f(\square) = 100 \Leftrightarrow a \cdot \square + b \cdot \square + c \cdot \square + d = 100 \underset{(I),(II)}{\Longleftrightarrow} \square \cdot a + \square \cdot b = 100$

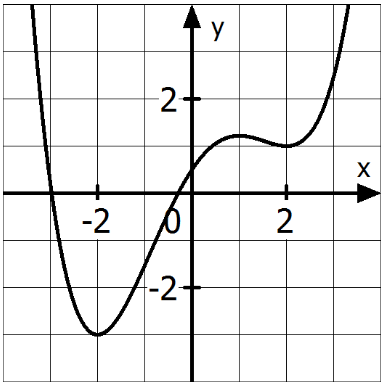
e) **Löse** das LGS aus (III) und (IV)es händisch **und** mithilfe des GTR ($\boxed{\text{MENU}}$, $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{F1}}$, $\boxed{\text{F1}}$ (für 2 Unbekannte), dann: Koeffizienten von a und b sowie die Zahl rechts der Gleichung eingeben) und **gib** die Funktionsgleichung f(x) **an**.

f) **Beschreibe** die Lösungsstrategie in eigenen Worten.

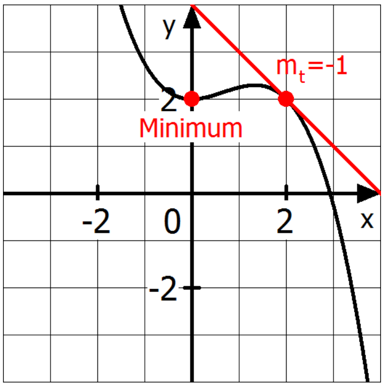
Aufgabe 4: Relevante Informationen notieren

Im Folgenden sind Steckbriefe von 5 Funktionen und 6 Grafen angegeben. 5 Grafen entsprechen dabei den vorgegebenen Steckbriefen. 1 Graf bleibt übrig. Für Funktion 1 wurde bereits eine Zuordnung vorgenommen und es wurden die *relevanten Informationen* im Steckbrief markiert (*kursiv gedruckt*) und in ROT in den Grafen eingetragen.

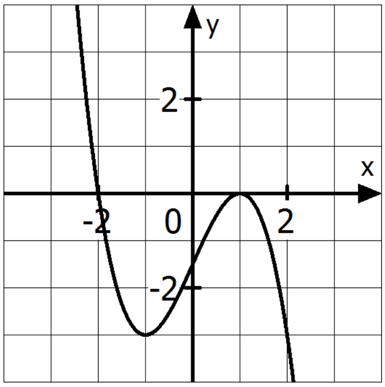
1. Eine Parabel 3. Ordnung[3] hat *in (2/2)* eine *Tangente parallel zur 2. Winkelhalbierenden* und *in (0/2)* ein *lokales Minimum*.
2. Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung hat in (2/4) eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden.
3. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch (0/2) und hat in (1/0) die Steigung Null.
4. Eine zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in (0/0) die Gerade t mit der Gleichung t(x) = 7x als Tangente und in (1/0) einen Wendepunkt.
5. Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse in (1/0) und hat in (0/-1,5) einen Wendepunkt.



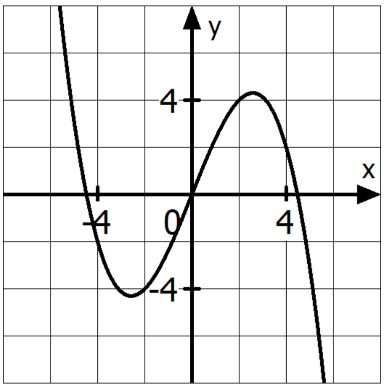
Funktion	



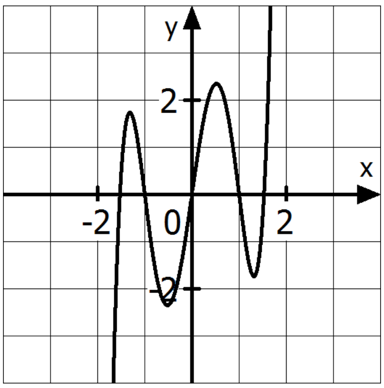
Funktion	1



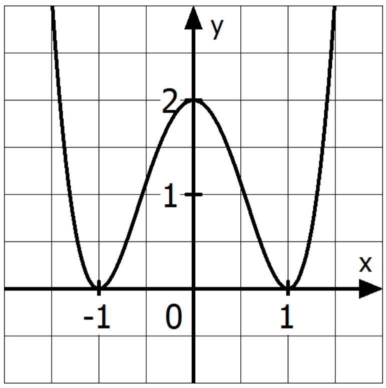
Funktion	



Funktion	



Funktion	



Funktion	

Ordne den Steckbriefen jeweils begründend einen Funktionsgrafen zu. Markiere in den Steckbriefen die relevanten Informationen und **trage** sie im jeweiligen Grafen mit ROT **ein**. **Erstelle** für den übrig gebliebenen Grafen einen geeigneten Steckbrief.

[3] Mit Parabeln der Ordnung n werden Grafen ganzrationaler Funktionen vom Grad n bezeichnet.

Aufgabe 5: Steckbriefaufgabe in 4 Schritten lösen

Ermittle für alle Steckbriefe aus den Aufgaben 2 und 4 die entsprechenden Funktionsgleichungen und **zeichne** anschließend mit dem GTR die Grafen. **Markiere** die relevanten Informationen im Steckbrief und im Grafen. Die Vorgehensweise wird nun für Funktion 1 aus Aufgabe 4 erläutert.

Eine Parabel 3. Ordnung hat in (2/2) eine Tangente parallel zur 2. Winkelhalbierenden und in (0/2) ein lokales Minimum.

Schritt 1: Welchen Grad hat die Funktion? Was sind die relevanten Informationen?

Die Funktion hat den Grad 3. Daher hat man den Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Für die Ableitungsfunktion gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Da der Grad der Funktion 3 ist, benötigen wir 4 relevante Informationen. Sie lauten:

(1) Der Graf geht durch (2/2).
(2) Der Graf hat in (2/2) eine zur 1. Winkelhalbierenden parallele Tangente.
(3) Der Graf geht durch (0/2).
(4) Der Graf hat in (0/2) ein lokales Minimum.

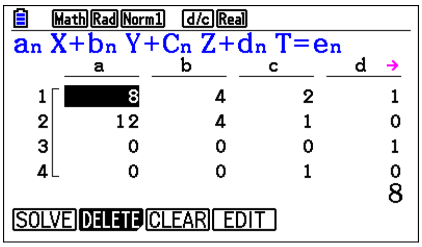
Schritt 2: Welche Gleichungen leiten sich aus den relevanten Informationen ab?

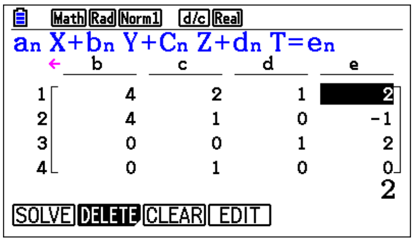
Durch die relevanten Informationen 1 bis 4 erhalten wir mithilfe von f und f´ geeignete Gleichungen, die zu Bestimmung der Parameter a, b, c und d notwendig sind:

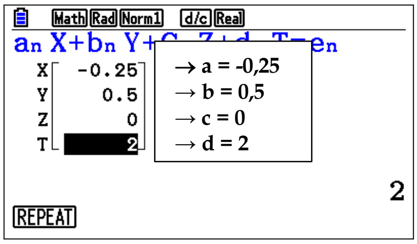
(1) $f(2) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \Leftrightarrow \mathbf{8a + 4b + 2c + d = 2}$
(2) $f'(2) = -1 \Leftrightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -1 \Leftrightarrow \mathbf{12a + 4b + c = -1}$
(3) $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 2 \Leftrightarrow \mathbf{d = 2}$
(4) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c = 0}$

Schritt 3: Wie lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems?

Mithilfe des GTR kann man in MENU A und F1 lineare Gleichungssysteme lösen. Dafür muss man zunächst die Anzahl der Unbekannten angeben (hier 4) und anschließend die Koeffizienten vor den Unbekannten a, b, c und d sowie die Zahl rechts von Gleichheitszeichen eingeben. Man erhält:

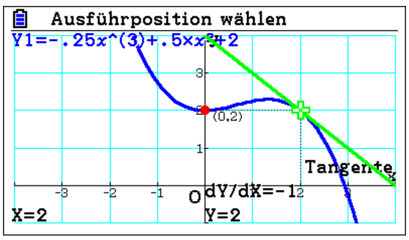






Schritt 4: Wie lautet die Funktionsgleichung? Kann das Ergebnis stimmen?

Durch Einsetzen der Lösungen in die allgemeine Funktionsgleichung erhält man: $f(x) = -0{,}25x^3 + 0{,}5x^2 + 2$ und für die Ableitung $f'(x) = -0{,}75x^2 + x$. Man rechnet nach, ob die Bedingungen erfüllt sind: $f(0) = 2$; $f(2) = 2$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = -1$. Der dazugehörige Graf erfüllt den Steckbrief auch grafisch.



Aufgabe 6: Formulierungshilfen

Im Folgenden findest Du eine Liste Textformen und Bedingungsgleichungen. **Gib** die fehlenden Textformen bzw. Bedingungsgleichungen **an**, indem du sie in die zweite Tabelle einträgst. Für 6 Textformen bzw. 3 Bedingungsgleichungen sind die Eintragungen in der oberen Tabelle angegeben. Du musst sie nur noch entsprechend eintragen. **Erstelle** für jede Zeile eine Skizze, in der die relevanten Informationen ROT markiert sind.

$f(0) = -2$	G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.	$f(1) = g(1) = 5 \wedge g'(1) \neq g'(1)$
$f(1) = 3 \wedge f'(1) = 0$	G_f hat bei x = 3 die Steigung 2.	$f(-1) = g(-1) = 1 \wedge f'(-1) = g'(-1) = -10$
$f(7) = 0$	G_f berührt die x-Achse bei x = 2.	$f(-1) = g(-1) = -4 \wedge f'(-1) = 3 \wedge f''(-1) = 0$

Textform	**Bedingungsgleichung(en)**
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	
	$f(x) = -f(-x)$ oder bei GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.
	$f'(3) = 2$
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	
	$f(2) = 1 \wedge f'(2) = 0$
	$f(0) = 3 \wedge f''(0) = 0$
G_f schneidet G_g mit $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).	
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	
Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	
G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit $g(x) = -2x + 2$.	
	$f(3) = 1 \wedge f'(3) = 0 \wedge f''(3) = 0$
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente $y = 3x - 1$.	
	$f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$
G_f berührt G_g mit $g(x) = 5x^2 - 4$ in (-1/y).	

Aufgabe 7: Der Besucherstrom – Steckbriefaufgabe im Sachkontext[4]

Ein Festzelt auf einem Jahrmarkt öffnet um 20:00 Uhr. Die Besucher werden am Eingang gezählt. Um 21 Uhr sind 40 Besucher im Festzelt. Der größte Besucherandrang besteht um 22 Uhr und beträgt 80 Besucher pro Stunde. Um Mitternacht sind die meisten Besucher im Zelt.

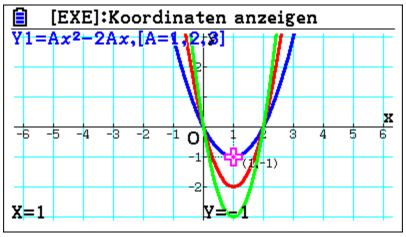
Bestimme eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, welche die Besucherzahl im Festzelt beschreibt. **Stelle** die Situation mit dem GTR in einem Koordinatensystem **dar**.

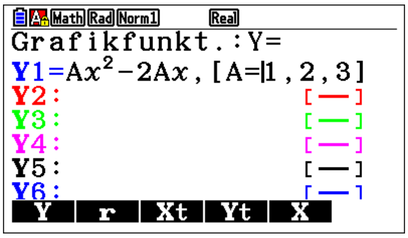
[Tipp: Wähle für die x-Achse als Einheit die Stunden nach Öffnung und für die y-Achse die Anzahl der Besucher in 100.]

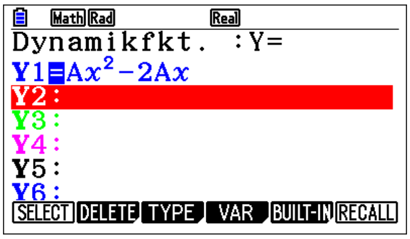
Infoblock: **Zeichnen von Funktionsscharen mit dem GTR**

In Aufgabe 6 führt uns Steckbrief 3 zu unendlich vielen Lösungsfunktionen. Diese Lösungsfunktionen hatten alle die Form $f_a(x) = ax^2 - 2ax$, wobei der **Parameter a** frei wählbar war. Durch Verändern des Parameters a erhält man eine jeweils andere Funktionsgleichung. Solchen Funktionen nennt man **Funktionsscharen** ganzrationaler Funktionen. Mithilfe des GTR können wir Grafen von Funktionsscharen zeichnen.

Im Folgenden sind die Grafen der Schar für a = 1, 2, 3 (Bild links) sowie eine Eingabemöglichkeit in MENU 5 (Bild Mitte) sowie MENU 6 (Bild rechts) angegeben:







Für die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionsscharen und deren Anwendung bei der Lösung von Abituraufgaben sei auf den Anhang verwiesen.

Zeichne mit dem GTR die Funktionsschar aus dem obigen Beispiel in MENU 6 und in MENU 5 für a = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Aufgabe 8: Eindeutig bestimmte, über- und unterbestimmte Steckbriefe

Bestimme eine Funktionsgleichung für die die folgenden 3 Steckbriefe von Funktionen. **Fertige** vorab eine Skizze für einen möglichen Grafenverlauf an. **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

1 Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch (1/2) und hat dort eine waagerechte Tangente.

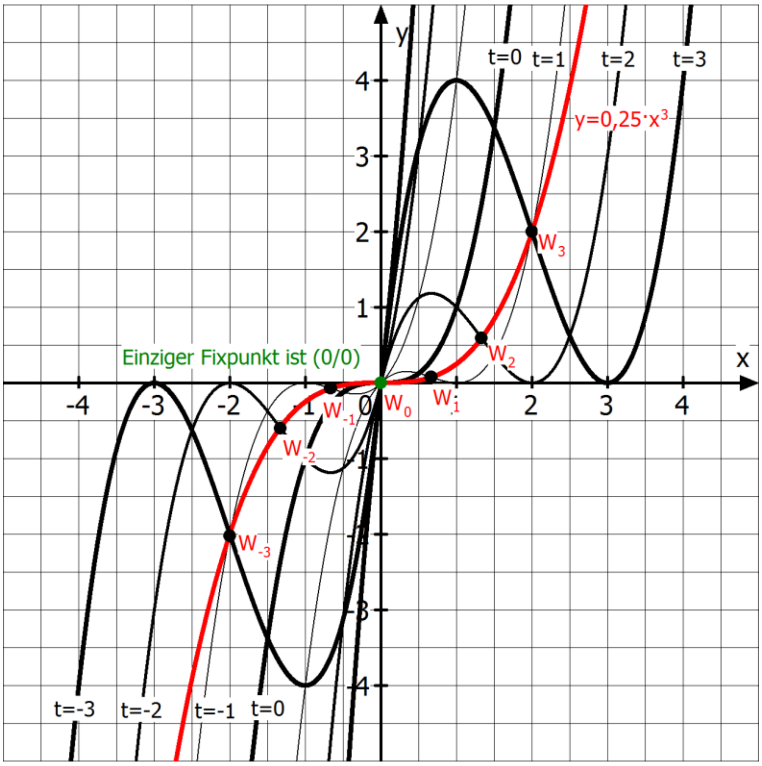
2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades hat in (0/4) einen lokalen Hochpunkt und schneidet die die x-Achse bei x = 2 und geht durch (1/3).

3 Für eine ganzrationale Funktion 2. Grades gilt: f(0) = f(2) = 0 und f´(1) = 0.

[4] Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015)

Infoblock: Ortskurven charakteristische Punkte und Fixpunkte bei Funktionsscharen

Gegeben ist Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = x^3 - 2t \cdot x^2 + t^2 \cdot x$. Für die Parameter t = -2, -1, 0, 1, 2 werden die Grafen im Folgenden angeben. Gesucht ist die **Kurve (Ortslinie) der Wendepunkte** der Grafenschar (roter Graf in der Abbildung). Ferner wollen wir zeigen, dass der Punkt (0/0) der **einzige** Punkt (= **Fixpunkt**) ist, der auf allen Grafen der Schar liegt.



Bestimmung der Wendepunkte in Abhängigkeit von t: $f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$; $f_t''(x) = 6x - 4t$ $f_t'''(x) = 6 > 0$. Also folgt: $f_t''(x) = 6x - 4t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}t$ Wegen $f_t''\left(\frac{2}{3}t\right) = 0 \ \wedge \ f_t'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 6 > 0$ $\wedge \ f_t\left(\frac{2}{3}t\right) = \frac{2}{27}t^3$ folgt, dass die Schar der Wendepunkte $W_t\left(\frac{2}{3}t / \frac{2}{27}t^3\right)$ ist.

Parameterdarstellung in Funktionsgleichung umwandeln: Setze nun $x = \frac{2}{3}t$ und $y = \frac{2}{27}t^3$. Funktionsgrafen können sich auch durch eine solche Parameterdarstellung beschreiben lassen. Um diese Form in eine Funktionsgleichung zu verwandeln, muss man den Parameter t eliminieren, so dass aus 2 Gleichungen mit den 3 Unbekannten x, y und t eine Gleichung mit den beiden Unbekannten x und y wird. Dafür formt man die erste Gleichung für x nach t um. Es folgt t = 1,5x. Setzt man dieses t in die Gleichung für y ein, erhält man: $y = 0{,}25 \cdot x^3$. Diese Gleichung beschreibt die Kurve, auf der alle Wendepunkte der Funktionenschar liegen.

(0/0) ist einziger Fixpunkt der Schar: Zu zeigen, dass (0/0) auf jeder Schar liegt ist klar. Allerdings könnte es weitere Fixpunkte geben. Zum Nachweis wählt man zwei beliebige unterschiedliche Funktionsgleichung mit den Parametern $t_1 \neq t_2$ uns setzt sie gleich:
$x^3 - 2t_1x^2 + {t_1}^2x = x^3 - 2t_2x^2 + {t_2}^2x \Leftrightarrow (2t_2 - 2t_1)x^2 + ({t_1}^2 - {t_2}^2)x = 0$
$\Leftrightarrow x\left(2(t_2 - t_1)x + ({t_1}^2 - {t_2}^2)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2(t_2 - t_1)x + ({t_1}^2 - {t_2}^2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{({t_1}^2 - {t_2}^2)}{2(t_2 - t_1)} = \frac{(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)}{2(t_1 - t_2)} = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$ (Nenner $2(t_2 - t_1) \neq 0$ wegen $t_1 \neq t_2$).
Damit liegt der Punkt (0/0) auf allen Grafen der Schar und ein zweiter Schnittpunkt hängt von der Wahl der t_1 und t_2 ab, liegt damit nicht auf jeder Schar.

Erläutere die Rechnungen und **notiere** die Überlegungen im Heft.

Aufgabe 9: Unterbestimmte Steckbriefe und Funktionsscharen

Gegeben sei nun eine nach oben geöffnete Normalparabel, die die x-Achse bei $x = 4$ schneidet.

a) **Ermittle** eine Funktionsgleichung der Schar der Normalparabeln. [Zur Kontrolle und zum Weiterarbeiten: $f_a(x) = x^2 + ax - 4a - 16$].

b) **Skizziere** mit dem GTR wie im obigen Infoblock Parabeln für verschiedene Werte von a und **untersuche**, auf welcher Kurve die Schar der Tiefpunkte liegt. [Hinweis: Betrachte z. B. die Parabeln für a = -16, -12, -8, -4, 0, 4]

c) **Berechne** den Wert für a, für den f_a genau eine Nullstelle $x = 4$ besitzt. [Tipp: Diskriminante.]

d) **Bestimme** rechnerisch die Koordinaten des Tiefpunktes in Abhängigkeit von a, **ermittle** die Ortskurve der Tiefpunkte der Parabelschar und **überprüfe** Deine zeichnerische Lösung aus Aufgabenteil b). [Hinweis: Infoblock oben.]

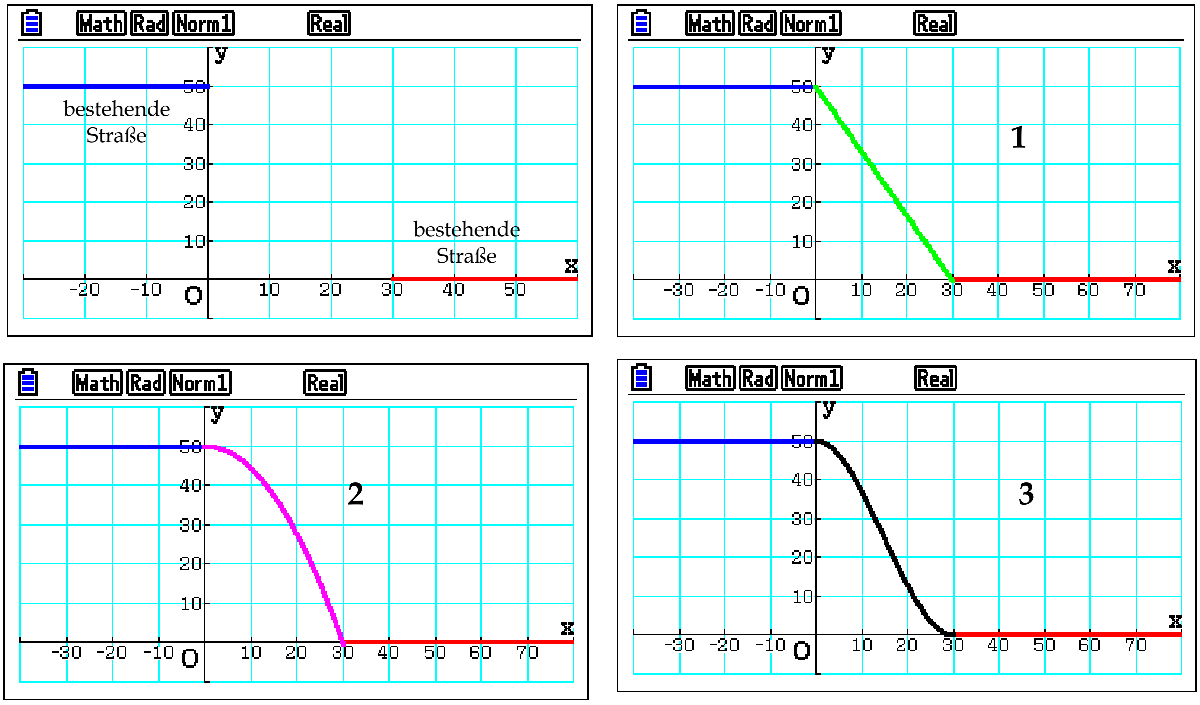
e) **Zeige** rechnerisch, dass der Punkte (4/0) der einzige Punkt ist, der auf allen Graphen der Funktionsschar liegt. Man nennt (4/0) auch einen **Fixpunkt** der Schar. [Hinweis: Infoblock oben.]

3 Trassierungsaufgaben

Der Begriff **Trassierung** beschreibt das Entwerfen und Festlegen der Linienführung eines Landverkehrsweges bzw. einer Trasse in Lage, Höhe und Querschnitt. Wir werden in diesem Kapitel Verfahren kennenlernen, um die **Trassierung von Straßen** zu **modellieren**. Dabei greifen wir auf Kenntnisse über ganzrationale Funktionen sowie Steckbriefaufgaben zurück.

Aufgabe 1: Verbindungsstraße

Zwei parallel verlaufende Straßen sollen miteinander verbunden werden. Die Situation ist unten mithilfe des GTR dargestellt worden (Angaben in Meter). Ziel ist es, eine Verbindungsstraße zwischen den bestehenden Straßen zu schaffen. Diese soll mit einer ganzrationalen Funktion modelliert werden. Drei mögliche Lösungen könnten die unten dargestellten Grafenstücke sein.



a) **Bestimme** für die drei Verbindungsstraßen die jeweilige Funktionsgleichung und **überprüfe** Deine Lösung mithilfe des GTR.

b) **Erörtere** Vor- und Nachteile der einzelnen Lösungen und **formuliere** Mindestbedingungen für eine geeignete Trassierung.

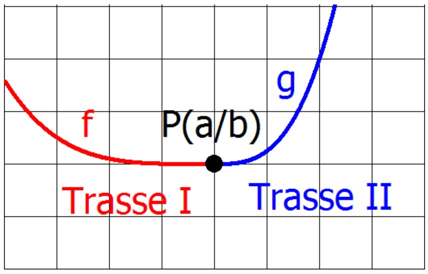
c) Ein Ingenieur ist mit allen drei Lösungen unzufrieden. Er moniert, dass bei allen drei Übergängen ein zu hohes Risiko bestehe, falls das Auto nicht rechtzeitig vor den Übergängen die Geschwindigkeit reduziert. Er fordert daher, dass bei beiden Übergangspunkten (0/50) und (30/0) Wendepunkte vorliegen sollen.

   (1) **Begründe** die Forderung des Ingenieurs und **leite daraus** den Mindestgrad der GRF ab.

   (2) **Ermittle** eine Modellfunktion, die den Ingenieur zufriedenstellt. **Zeichne** sie mit dem GTR. **Zeichne** auch die Grafen der Ableitung und **beschreibe** deine Beobachtungen.

Aufgabe 2: Sprung-, knick- und krümmungssprungfrei[5]

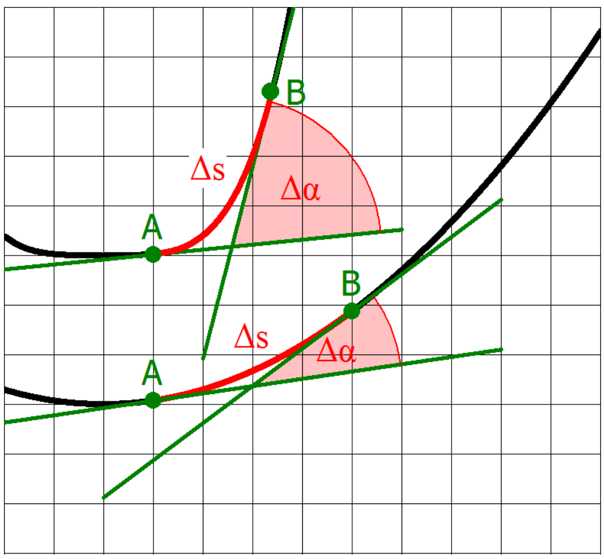
Beim Übergang von einer Trasse I in eine zweite Trasse II ist der Übergangspunkt P von zentraler Bedeutung. Aus nachvollziehbaren Gründen sollte sich Stück II in A lückenlos an Stück I anschließen. Man nennt einen solchen Übergang dann **sprungfrei** (bzw. **stetig)**.



Zusätzlich fordert man, dass sich im Punkt P kein Steigungssprung ergeben soll, damit das Lenkrad nicht plötzlich „herumgerissen" werden muss. Die beiden sich treffenden Kurven sollen also im Übergangspunkt P die gleiche Steigung besitzen. Übergänge, die im Übergangspunkt die gleiche Steigung haben, nennt man **knickfrei** (oder **glatt** bzw. **differenzierbar**).

Schließlich verlangt man noch, dass sich im Übergangspunkt P auch das Krümmungsverhalten nicht sprunghaft ändert. Übergänge, die im Übergangspunkt auch in der zweiten Ableitung übereinstimmen, nennt man **krümmungssprungfrei** (**krümmungsruckfrei** bzw. **zweimal differenzierbar).**

Um einen krümmungssprungfreien Übergang besser zu verstehen, muss geklärt werden, was man unter der Krümmung versteht. Um ein Maß für die **mittlere Krümmung $\Delta\kappa$**[6] zu bekommen, betrachtet man die Richtungsänderung $\Delta\alpha$ (als Differenz zweier Steigungswinkel) im Verhältnis zur Länge Δs des Kurvenstücks, auf der sich die Richtung ändert (vgl. folgende Abbildung). Wird Δs nun unendlich klein, erhält man als Grenzwert $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ **die lokale Krümmung**. Kurz gefasst: **Die Krümmung gibt das Ausmaß der Richtungsänderung auf einer bestimmten Strecke an.**



Definition der Krümmung:

Mittlere Krümmung $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

Lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

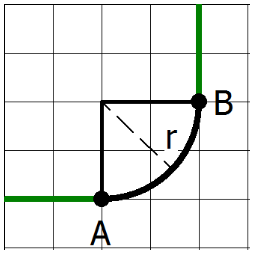
Oben ist die mittlere Krümmung Δk stärker, da bei etwa gleicher Strecke Δs die größere Richtungsänderung $\Delta\alpha$ besteht.

---

[5] Idee und Anregungen von Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf unter http://www.langemathe-nacht.de/autobahnkreuze/LMN%202012%20-%20Modul%20Autobahnen.pdf (29.7.2016) sowie von G. Roolfs unter http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/jahrgang112pdf/Strassenbau.pdf (29.7.2016)

[6] Es handelt sich um den griechischen Buchstaben **κ** **(**„kappa"), der an Krümmung erinnern soll.

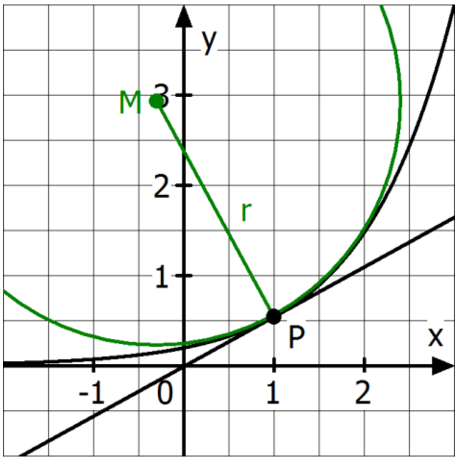
Beispiel: Übergang von einer Strecke in einen Viertelkreis



Eine gerade Strecke hat offenbar die Krümmung Null. Ein Kreis besitzt eine konstante Krümmung, da sich die Richtung gleichmäßig ändert. Daher ist der Übergang A von einer geraden Strecke in eine viertelkreisförmige Kurve nicht krümmungssprungfrei. Dies spürt man als Autofahrer, wenn im Übergangspunkt A eine plötzliche auftretende Zentrifugalbeschleunigung den eigenen Körper in den Gurt drückt. Gleiches gilt in umgekehrter Reihenfolge im Übergangspunkt B.

a) **Skizziere** jeweils ein Beispiel für einen nicht sprungfreien, einen sprungfreien aber nicht knickfreien, einen sprung- und knickfreien aber nicht krümmungsruckfreien sowie einen krümmungsruckfreien Übergang dar.

b) **Begründe** mit der obigen Definition, warum die lokale Krümmung einer Geraden überall Null ist und beim Durchlaufen des Viertelkreises mit dem Radius r gegen den Uhrzeigersinn $\frac{1}{r}$ beträgt.



Die obige Definition zur Krümmung ist zwar geometrisch sehr anschaulich, als Rechenwerkzeug aber eher ungeeignet. Dass die zweite Ableitung kein Maß für die Krümmung sein kann wird klar, wenn man beispielsweise eine Normalparabel mit $f(x) = x^2$ betrachtet. Die zweite Ableitung beträgt hier $f''(x) = 2$. Dies hieße, dass die Normalparabel überall die gleiche Krümmung hätte.

Um eine Recheninstrumentarium zu bekommen, versucht man einen Grafen einer Funktion f an jeder Stelle durch einen Kreis k mit der Krümmung $\frac{1}{r}$ (vgl. Aufgabe b)) anzunähern. Dabei soll an jeder Stelle a gelten: $k(a) = f(a) \land k'(a) = f'(a) \land k''(a) = f''(a)$. Im Beispiel rechts wurde der Graf von f sowie der dazugehörige Krümmungskreis an der Stelle a = 1 dargestellt. Dieser Ansatz führt mit ein wenig Rechenaufwand[7] zu einer Formel für den **Krümmungsradius r** und als Kehrwert für die **Krümmung κ**:

$$\mathbf{r(a)} = \frac{\left(1+[f'(a)]^2\right)^{1,5}}{f''(a)} \text{ und } \boldsymbol{\kappa}\mathbf{(a)} = \frac{f''(a)}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}}$$

c) **Bestimme** die Krümmung κ(a), falls a eine Extremstelle bzw. eine Wendestelle ist. **Ermittle** das Vorzeichen der Krümmung, falls der Graf von f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

Merke:

(1) Zwei Graphen von Funktionen f und g heißen im Übergangspunkt P(a/b) …

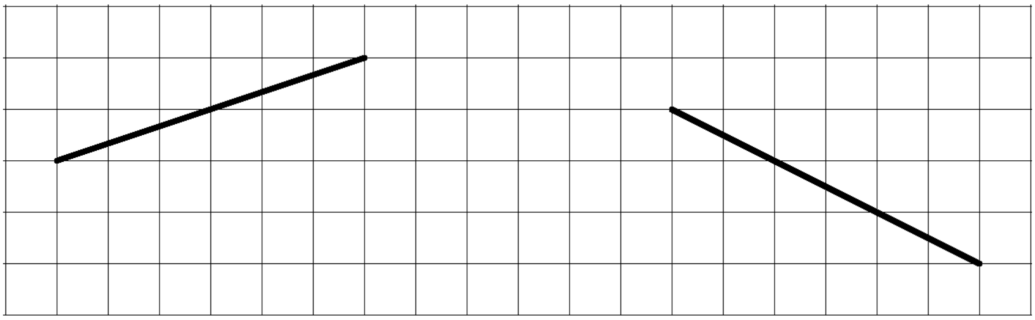
- **sprungfrei**, falls $f(a) = g(a)$.
- **knickfrei**, falls $f'(a) = g'(a)$.
- **krümmungsruckfrei**, falls $f''(a) = g''(a)$.

(2) Die **Krümmung** ist ein Maß für die Richtungsänderung pro zurückgelegter Strecke. Geraden haben die Krümmung Null, Kreise mit Radius r eine konstante Krümmung $\frac{1}{r}$. In Wendepunkten ist die Krümmung immer Null, an Extremstellen entspricht sie dem Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle.

[7] Eine Herleitung findet man z. B. von G. Roolfs unter http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/AnalysisTeil4pdf/Kruemmungskreis.pdf (28.7.2016)

Aufgabe 3: Straßenkuppe[8]

Beim Bau von Straßen gilt es Straßenkuppen oder –senken möglichst holperfrei zu überwinden. Dazu können ganzrationale Funktionen verwendet werden. In der nachfolgenden Abbildung sind die beiden Straßenstücke angegeben, die es geeignet zu verbinden gilt [1 Kästchen entspricht 1 LE].



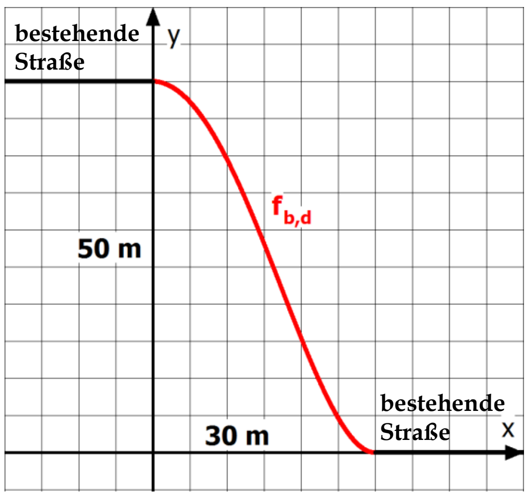
a) **Übertrage** die Situation in ein geeignetes Koordinatensystem und **ermittle** eine Funktion möglichst niedrigen Grades, deren Graph zum Ausrunden der beiden Straßenstücke vor und nach der Kuppe geeignet ist, so dass die Übergänge **sprung- und knickfrei** sind.

b) **Zeige**, dass die Übergänge **nicht krümmungsruckfrei** sind und **gib an**, welchen Grad die Modellfunktion von zwei **sprung-, knick- und krümmungsruckfreien** Übergangen haben müsste. **Ermittle** eine ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, dessen Graf **sprung-, knick- und krümmungsruckfreien** Übergange garantiert.

c) **Stelle** die Situationen in a) und b) mithilfe des GTR **dar**.

Aufgabe 4: Trassierung der Verbindungsstraße mit einer Funktionsschar[9]

Zwei parallel verlaufende Straßen sollen wie in Aufgabe 1 miteinander verbunden werden. Die Funktion $f_{b,d}$ mit der Gleichung $f_{b,d}(x) = \frac{1}{b} \cdot (d - x^2)^2$ (b, d > 0) soll die neue Verbindungsstraße beschreiben.



a) **Bestimme** die Parameter b und c und **gib** den Grad der Funktionenschar $f_{b,d}$ **an**.

b) **Berechne** $f_{b,d}'(x)$ und $f_{b,d}''(x)$ und **zeige**, dass die Verbindungsstraße **knick- aber nicht krümmungssprungfrei** in die bestehenden Straßen einmündet.

c) **Bestimme** den Wendepunkt der Verbindungsstraße für b = 16200 und d = 900 [für beliebige b und d].

d) **Stelle** die Situation mit dem GTR dar für unterschiedliche Werte für b und d in der Nähe der Werte b = 16200 und d = 900 und **untersuche**, welchen Parameter man verändern müsste, wenn die beiden parallelen Straßen statt 50 m einen anderen Abstand hätten, aber der horizontale Abstand der beiden Straßen unverändert bei 30 m bliebe.

---

[8] Idee aus Fokus Mathematik für die Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015)

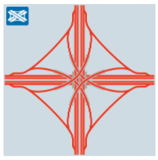
[9] Idee aus Lambacher Schweizer für die Q-Phase, Klett-Verlag (2012).

Aufgabe 5: Trassierung von Autobahnkreuzen[10]

Die folgenden Abbildungen zeigen vier verschiedene Bauformen von Autobahnkreuzen in vereinfachter typisierter Darstellung[11].


Turbine

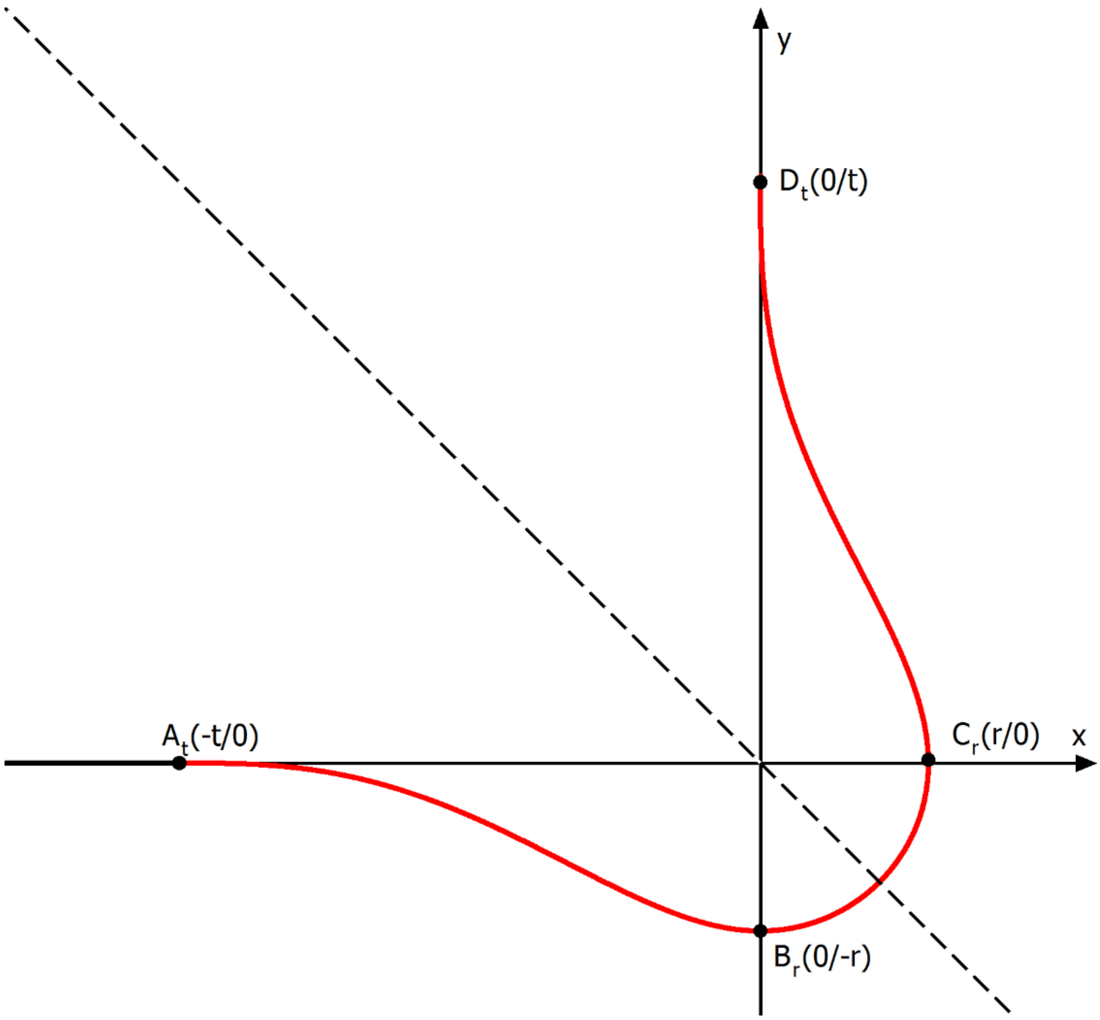

Kleeblatt


Malteser


Windmühle

a) **Diskutiere** innerhalb Deiner Tischgruppe die vier dargestellten Varianten hinsichtlich der Kriterien „Platzbedarf“, „mögliche Geschwindigkeiten beim Autobahnwechsel“ und „Kosten durch aufwändige oder viele Brücken". **Nenne** Beispiele für Dir bekannte Autobahnkreuze.

Die folgende Darstellung beschreibt die Linksabbiegung in einem Überwurf-Kreuz. Vereinfachend nehmen wir an, dass das Kreuz rechtwinklig ist und die gesamte Trasse in drei Teile zerlegt werden kann, wobei der mittlere Teil ein Viertelkreis mit Radius r ist.



[10] Idee von Dr. A. Bornhoff, Dr. A. Rolf, Dr. J. Rolf unter http://www.langemathenacht.de/autobahnkreuze/LMN%202012%20-%20Modul%20Autobahnen.pdf (29.7.2016).
[11] https://de.wikipedia.org/wiki/Autobahnkreuz (29.7.2016)

Ziel: Gesucht ist eine ganzrationale Funktion, die Trassenstück I beschreibt. Folgende Modellannahmen wollen wir machen:

(1) In den Punkten A und B ist die gesuchte Kurve mit der Fahrbahn der Ausgangs-Autobahn (x-Achse) und dem Kreisbogen II (Trassenstück II) verbunden.
(2) Der Übergangspunkt A ist knickfrei und krümmungssprungfrei.
(3) Beim Übergangspunkt B wird von einem knickfreien Übergang ausgegangen.

Wir nehmen zunächst an, dass r = 50 und t = 100 ist. Es gilt also: A(-100/0) und B(0/-50).

b) **Skizziere** die Situation in Deinem Heft und **markiere** die Bereiche, wo das Trassenstück I links- bzw. rechtsgekrümmt ist: **Begründe**, warum Trassenstück I durch eine ganzrationale Funktion mindestens vierten Grades beschrieben wird.

c) **Ermittle** eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, welche die Modellannahmen (1) bis (3) erfüllt. [Kontrollergebnis: $f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50\ (-50 \leq x \leq 0)$]

d) **Untersuche** die Funktion f für $-50 \leq x \leq 0$ auf ihr Krümmungsverhalten.

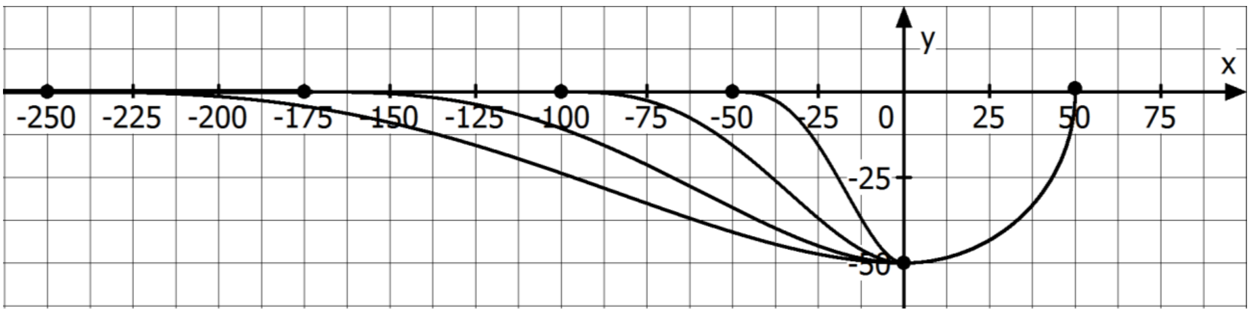
e) **Zeige**, dass der Übergang B nicht krümmungsruckfrei ist. [Tipp: Merksatz (2) in Aufgabe 2]

Gegeben sei eine Funktionsschar $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r\ (-t \leq x \leq 0, r, t \geq 0)$.

Definition: Eine Funktion $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r\ (-t \leq x \leq 0, r, t \geq 0)$ beschreibt in Abhängigkeit der beiden Parametern r und t eine **Schar von Funktionen** ganzrationaler Funktionen vierten Grades. Die Parameter r und t heißen **Scharparameter** der Funktionenschar und sind beliebig aber feste Zahlen, während die Zahl x als Variable ständig variieren darf.

f) **Weise nach**, dass die Funktionsschar $f_{r,t}$ die Bedingungen (1) bis (3) für die Übergangspunkte A(-t/0) und B(0/-r) erfüllt und somit Modellfunktion für die Trasse I ist.

g) In der folgenden Abbildung werden vier Grafen der Funktionsschar dargestellt.



Gib jeweils die Parameter r und t an und **entscheide** begründend mithilfe von Aufgabe 2, welche der vier Grafen zur Modellierung von Trassenstück I am besten geeignet ist.

h) **Untersuche** mit dem GTR für verschiedene Werte für r und t, wie bei vorgegebenen Kurvenradius r der Parameter t gewählt werden muss, damit auch der Übergangspunkt B_r krümmungsruckfrei ist.

i) **Ermittle** rechnerisch eine Bedingung für r und t, so dass der Übergangspunkt B_r krümmungsruckfrei ist. [Tipp: Merksatz (2) in Aufgabe 2]

Zur Erinnerung: Ein **krümmungsruckfreier Übergang** bedeutet anschaulich, dass es einen Kreis gibt, der sich an beide Kurvenstücke gleichermaßen „anschmiegt". Dies ist in folgender Abbildung für die rote Kurve der Fall.

Zusatzaufgaben (1er-Aufgaben)

j) **Begründe**, dass sich der Viertelkreis im Kurventeil II durch die Funktion k_r mit der Funktionsgleichung $k_r(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $0 \leq x \leq r$ beschreiben lässt. [Tipp: Satz des Pythagoras]

k) **Leite** die obige Gleichung der Funktionsschar $f_{r,t}$ her, indem Du allgemein für die Übergangspunkte A(-t/0) und B(0/-r) fünf Bedingungen für eine ganzrationale Funktion vierten Grades aufstellst und dann das entstehende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von r und t mit der Gaußverfahren löst.[12]

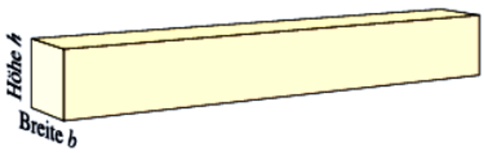
[12] Aufgabe kann von den Schülern erst gelöst werden, wenn das Gaußverfahren eingeführt wurde. Dies geschieht in der Regel im zweiten Halbjahr der Q1 im Rahmen der analytischen Geometrie.

4 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

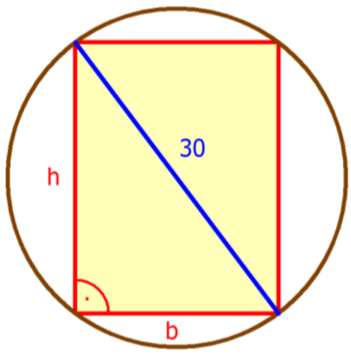
In diesem Kapitel wollen wir erneut Modellfunktionen finden, die uns helfen Optimierungsprobleme zu lösen. Dabei beschäftigen wir uns einerseits mit geometrischen Optimierungsaufgaben und Aufgaben zur Gewinnmaximierung. Solche Aufgaben werden oft mit dem Begriff **Extremwertaufgaben** umschrieben. Abschließend fassen wir das in die Vorhaben Gelernte bezüglich des Modellierens und der vier Stufen des Modellierungsprozesses (**Modellierungskreislauf**) zusammen.

Geometrische Optimierungsprobleme

Aufgabe 1: Zimmermannsregel und Tragfähigkeit eines Balkens[13]



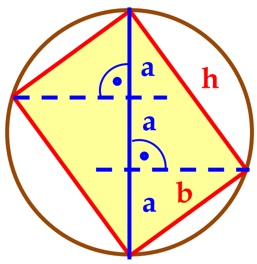
Ein Holzbalken, wie er zum Beispiel in einem Dachstuhl verwendet wird, soll eine möglichst hohe Tragfähigkeit aufweisen. Solche Balken sind meist nicht von quadratischem Querschnitt, sondern höher als breit. Das ist sinnvoll, denn überlege Dir z. B., wie Du ein Lineal halten würdest, wenn es sich nicht durchbiegen oder gar brechen soll. Die **Tragfähigkeit des Balkens** ist proportional zu seiner **Breite b** und zum **Quadrat seiner Höhe h**. Seine Tragfähigkeit kann deshalb durch den Term $\mathbf{T(b,h) = b \cdot h^2}$ beschrieben werden. [14]



a) **Bestimme** die optimalen Maße eines Balkens, der aus Rundholz mit dem Durchmesser 30 cm geschnitten wird und eine möglichst hohe Tragfähigkeit aufweisen soll.

b) Aus Platzgründen soll aus dem Rundholz mit einem Durchmesser von 30 cm ein Balken ausgeschnitten werden, der nicht breiter als 14 cm ist. **Ermittle** die optimalen Maße für die neue Situation.

c) **Beurteile** aufgrund des errechneten Wertes die Qualität der Zimmermannsregel sowie der Faustregel.

Zimmermannsregel	**Faustregel**
Teile den Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts des Baumstammes in 3 gleiche Teile. Errichte in den Teilungspunkten jeweils das Lot. Damit erhältst du den Balkenquerschnitt. 	Breite : Höhe = 5 : 7

d) **Löse** die Aufgabe 1a mithilfe der Formel $\mathbf{T(b,h) = k \cdot b \cdot h^2}$, wobei $k > 0$ eine beliebige aber feste Proportionalitätskonstante ist. Der Baumstamm hat dabei einen Durchmesser von D cm.

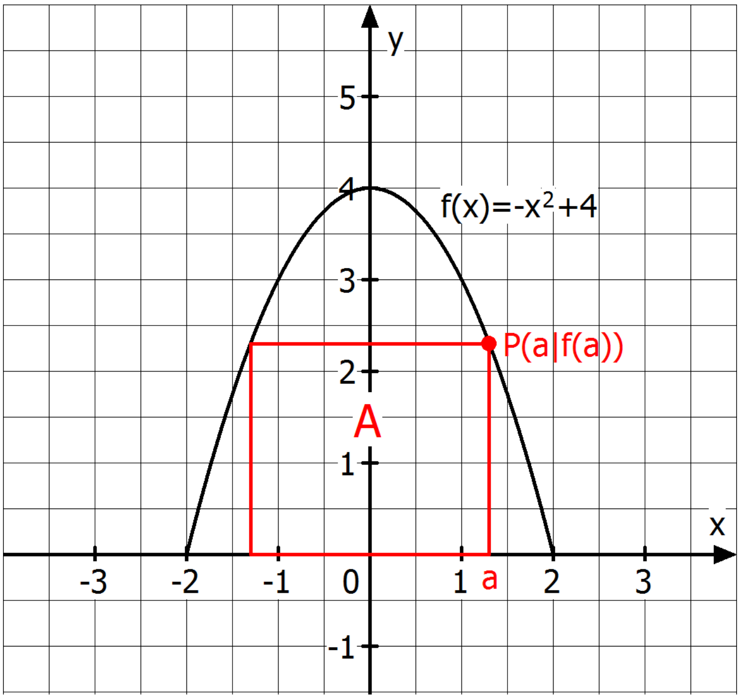
[13] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

[14] Eigentlich müsste der Term $T(b,h)$ wegen der Proportionalität zu b und h^2 mit einem Proportionalitätsfaktor k versehen werden, so dass $T(b,h) = k \cdot b \cdot h^2$. Warum kann aber zur Lösung der Aufgabe $k = 1$ gewählt werden?

Aufgabe 2: Extremwertaufgaben im Koordinatensystem

a) In einem Koordinatensystem für $x \in [0; 2]$ ist ein Parabelbogen mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = 4 - x^2}$ gegeben. Zu jeder Stelle a mit $0 < a < 2$ gibt es ein Rechteck A, von dem eine Seite auf der x-Achse liegt und sich zwei Ecken auf dem Parabelbogen befinden (vgl. Abbildung).

Bestimme die Seitenlängen des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt [größtem Umfang].



a) **Löse** folgende „Koordinatensystem-Extremwertaufgaben“:

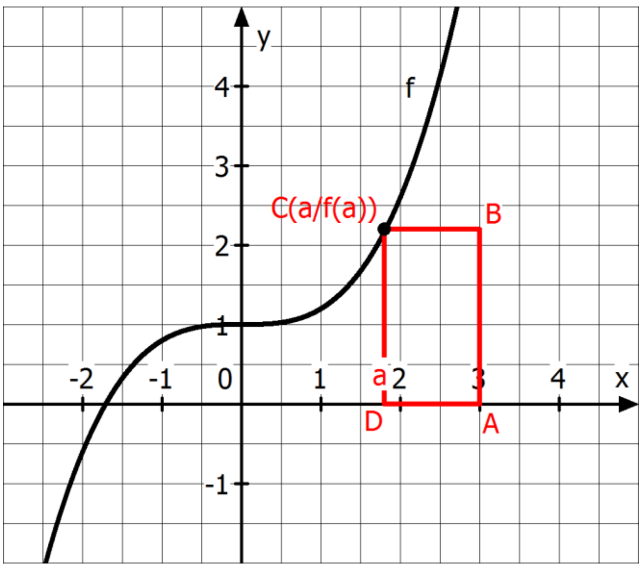
(1) Ein möglichst großes Rechteck soll bestimmt werden, das in einem Koordinatensystem nach unten von der x–Achse, nach links von der y–Achse und nach oben und rechts vom Grafen der Funktion f mit $\mathbf{f(x) = 9 - x^2}$ begrenzt wird.

Bestimme die Breite und die Höhe des Rechtecks. **Mache** vorher eine Skizze.

(2) **Ermittle** den kleinste Abstand vom Punkt (3/0) zur Parabel $\mathbf{f(x) = x^2}$. [Tipp: Betrachte als Zielfunktion das Quadrat der Längenfunktion.]

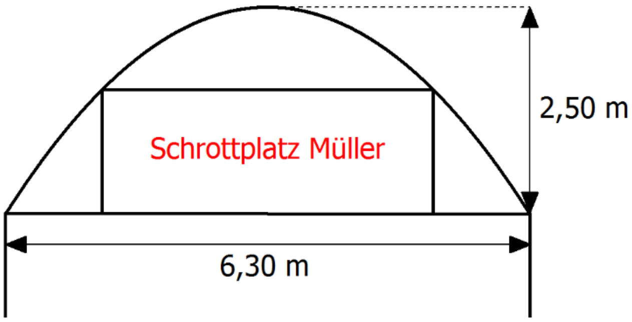
(3) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = 1 + \frac{1}{5}x^3}$. Die vier Punkte A(3/0), B(3/f(a)), C(a/f(a)) D(a/0) legen für die Zahl a mit $0 < a < 3$ ein Rechteck fest. Die Situation ist in der Abbildung rechts dargestellt.

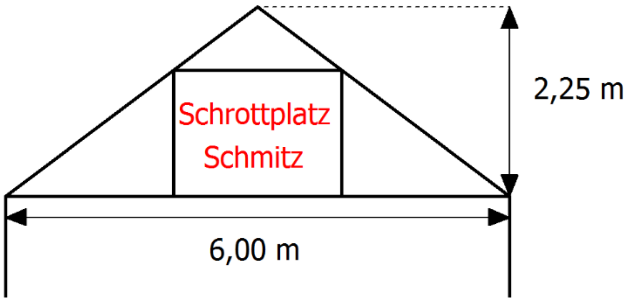
Zeige, dass für den Flächeninhalt des Rechtecks $A(a) = -\frac{1}{5}a^4 + \frac{3}{5}a^3 - a + 3$ gilt und **untersuche**, für welches a der Flächeninhalt maximal wird.



Aufgabe 3: Werbeschilder[15]

Herr Müller möchte im parabelförmigen Teil der Durchfahrt zu seinem Schrottplatz ein möglichst großes rechteckiges Werbeschild anbringen. Auch seine Konkurrenzfirma Schmitz möchte ein möglichst großes rechteckiges Schild montieren. Allerdings hat der entsprechende Teil die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Die beiden folgenden Abbildungen verdeutlichen die Situation.





Bestimme die Maße der beiden „optimalen" Werbeschilder.

Aufgabe 4: Die optimale Dose – Lösungsstrategie bei Extremwertaufgaben

Eine Fertigsuppenfirma verkauft ihre Produkte in Konservendosen mit 750 ml Inhalt. Um die Herstellungskosten minimal zu halten, muss für die Dose möglichst wenig Material verbraucht werden.

a) **Bestimme** den Durchmesser und die Höhe dieser „optimalen" Dose.

b) Eine Lösung der gestellten Aufgabe kann in einer PPP eigesehen werden. Die PPP findest du unter www.maspole.de. **Übertrage** die Lösungsstrategie in Dein Heft und **bearbeite** mithilfe des dargestellten Rasters die nachfolgenden „Volumen-Oberfläche-Aufgaben".

   (1) Ein Erfrischungsgetränk soll in zylindrischen Dosen aus Weißblech angeboten werden. Das Volumen einer Dose soll 0,33 l betragen. Aus Kostengründen soll der Materialbedarf pro Dose durch günstige Formgebung möglichst niedrig gehalten werden. **Berechne** den Radius und Höhe einer solchen „optimalen" Dose.

   (2) Eine Firma will für Hobbygärtner zylinderförmige Regentonnen herstellen, die bei minimalem Materialbedarf maximales Volumen besitzen. **Bestimme** die Abmessungen, wenn 2 m² Material je Regentonne zur Verfügung stehen. Löse die Aufgabe allgemein für a m² Material.

   (3) Gegeben ist ein Kegel, dessen Grundfläche den Radius 3 cm hat, und der 10 cm hoch ist. In diesen Kegel soll ein Zylinder einbeschrieben werden, der das maximale Volumen hat. **Bestimme** die Höhe des Zylinders. [Tipp: Strahlensatz.]

c) **1er-Aufgabe:** Gegeben ist ein Kegel A, dessen Grundfläche den Radius 4 cm hat, und der 10 cm hoch ist. In diesen Kegel A soll ein Kegel B einbeschrieben werden, der mit seiner Spitze auf der Grundfläche des Kegels A steht. **Ermittle** die Höhe des Kegels B, wenn er (a) das maximale Volumen und (b) die minimale Oberfläche hat.

[15] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

Aufgaben zur Gewinnmaximierung

Aufgabe 5: Kalkulation am Bratwurststand [16]

Die Bratwürste von Herrn Heinze sind beliebt: Im Durchschnitt verkauft er pro Tag 250 Bratwürste im Brötchen für 1,80 € pro Stück. Aber die Kosten machen ihm Sorgen, sie steigen und steigen. Rechnet er die festen Kosten für den Strom und die Standmiete auf einen Tag um, sind es nun schon 90 € pro Tag. Und die Ausgaben pro Bratwurst für Wurst, Brötchen, Senf Currysauce und Serviette betragen inzwischen 1,20 €. Herr Heinze wird nicht mehr um eine Preiserhöhung herumkommen und überlegt sich deshalb: „Erhöhe ich den Preis um 10 Cent, verkaufe ich pro Tag ein Brötchen weniger, erhöhe ich um 20 Cent, sind es schon vier Bratwürste weniger, bei 30 Cent sogar neun, bei 40 Cent 16 Bratwürste usw."

a) **Begründe**, dass es sich bei Herrn Heinzes Annahme eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Preiserhöhung und Absatzrückgang vernünftig ist.

b) **Stelle** für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G die Funktionsterme K(n) und G(n) auf, wobei n die Anzahl der Erhöhungen des Preises jeweils um 0,10 € ist. **Untersuche**, bei welchem Verkaufspreis der Gewinn maximal wird.

Aufgabe 6: Kaffeerösterei [17]

Eine Kaffeerösterei setzt bei einem Verkaufspreis von 10 € pro Kilogramm erfahrungsgemäß etwa 10000 kg pro Monat ab. Aufgrund seiner langjährigen Erfahrung vermutet der Geschäftsführer, dass eine Verkaufspreisreduzierung um jeweils 25 Cent zu einem Mehrumsatz von 2000 kg pro Monat führen würde. Die Selbstkosten betragen nahezu unabhängig vom Absatz 5,50 € pro Kilogramm.

a) **Bestimme** den Gewinn für die Verkaufspreise von 10 €, 9,50 € und 6 €.

b) **Stelle** allgemein die Gewinnfunktion auf und **bestimme** den für die Firma besten Preis.

c) **Diskutiert** anschließend den oben beschriebenen Ansatz und **beschreibt** einen realistischeren Zusammenhang von Preissenkung und Gewinn.

Aufgabe 7: Kosten – Einnahmen - Gewinn [18]

Die Gesamtkosten für die Herstellung von x tausend Einheiten einer Ware lassen sich für $0 \leq x \leq 9$ berechnen mit $K(x) = 2x^3 - 16x^2 + 48x + 100$. Der Erlös E für den Verkauf von x tausend Einheiten dieser Ware beträgt $E(x) = 144x - 16x^3$.

a) **Untersuche**, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Herstellungskosten $\frac{K(x)}{x}$ am geringsten sind.

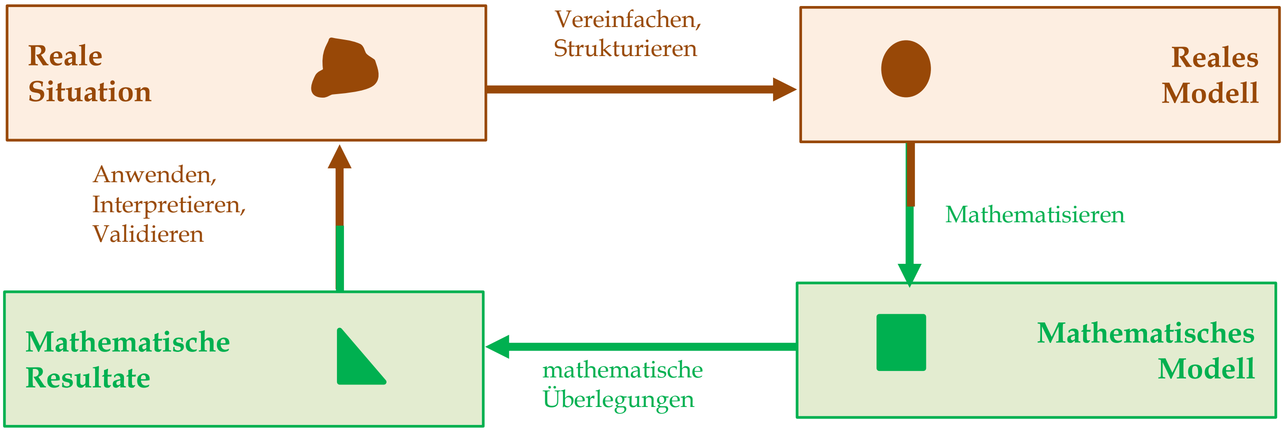
b) **Bestimme** die Produktionsmenge, die den größten G mit $G(x) = E(x) - K(x)$ garantiert.

[16] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).
[17] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).
[18] Aufgabeidee aus Fokus Mathematik in der Q-Phase, Cornelsen-Verlag (2015).

Modellierungskreislauf

Aufgabe 8: Was haben wir gelernt?[19]

Die Idee des mathematischen Modellierens von Sachproblemen kann in dem abgebildeten Modellierungsprozess, der eventuell mehrfach durchlaufen werden muss, schematisch dargestellt werden. Dabei wird das mathematische Modell durch eine Funktion beschrieben, die dem Sachproblem am besten entspricht.



Das Ziel des Modellierungsprozesses ist das Anwenden, Interpretieren und Validieren der mathematischen Lösungen in der Praxis. Dies kann zur Bestätigung der Modellannahmen, zu Aussagen über Realsituationen oder zu sinnvollen Prognosen führen oder diese auch widerlegen.

a) **Arbeitet** als Tischgruppe **heraus,** welche Aspekte ihr innerhalb des Modellierungskreislaufs in diesem Unterrichtsvorhaben kennengelernt habt. Gab es Bereiche, die besonders oft vorkamen bzw. Prozesse, die nur sehr selten oder gar nicht angesprochen wurden?

b) **Verdeutlicht** die vier Stufen des Modellierungskreislaufes mit einem selbst gewählten Beispiel, das ihr als Tischgruppe (PPP, Folie) vortragen sollt. Die Präsentation muss von der gesamten Gruppe gleichermaßen getragen werden.

[19] HENN, H.-W.: Mathematik und der Rest der Welt. In: mathematiklehren 113, 4-7 (2002).

5 Kontrollaufgaben

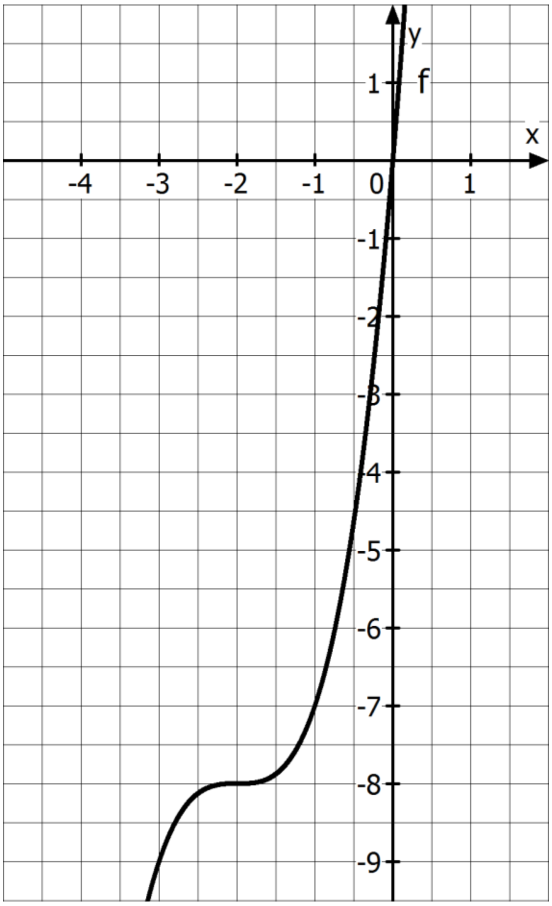
Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
Nullstellen einer GRF dritten Grades ohne GTR berechnen.	1a)				
die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung angeben, eine Tangente einzeichnen und deren Gleichung zeichnerisch und rechnerisch ermitteln.	1b), 1c)				
einen Grafen einer GRF auf sein Krümmungsverhalten untersuchen.	1d)				
begründend entscheiden, ob Aussagen bezüglich des Krümmungsverhaltens einer Funktion zutreffend sind.	2				
einen Grafen einer Funktion skizzieren, wenn bestimmte Eigenschaften durch Funktionswerte der Funktion, der Ableitungsfunktion und der Funktion der zweiten Ableitung vorgegeben sind.	3a)				
auf der Basis eines Grafen relevante Informationen für deren Bestimmung angeben und damit die Funktionsgleichung bestimmen.	3b)				
eindeutig bestimmte Steckbriefaufgaben zu GRF lösen.	4a), 4b)				
eine unterbestimmte Steckbriefaufgabe einer GRF lösen und die Gleichung der Funktionsschar angeben.	4c)				
eine Parabelschar mittels Diskriminante auf Nullstellen untersuchen.	4c)				
Geradengleichungen anhand eines Schaubildes bestimmen.	5a)				
erläutern, was ein sprung- und knickfreien Übergang bedeutet.	5b)				
einen Straßenstück mit zwei knick- und sprungfreien Übergängen mittels einer GRF dritten Grades modellieren und die Gleichung der Modellfunktion berechnen.	5c)				
rechnerisch nachweisen, dass das Straßenstück nicht durch eine Funktion zweiten Grades modelliert werden kann.	5d)				
rechnerisch zeigen, dass Übergänge nicht krümmungssprungfrei sind und den Grad für eine mögliche Modellfunktion mit krümmungssprungfreien Übergängen begründend angeben.	5e)				
Extremwertaufgaben mit einer geometrischen Aufgabenstellung unter Verwendung gebrochen rationaler Zielfunktionen und der 5-Schritt-Vorgehensweise (Zielfunktion, Definitionsbereich, Nebenbedingung, Extremwertbestimmung, Antwort) lösen.	6a), 6b)				
eine Extremwertaufgabe mit einer geometrischen Problemstellung unter Verwendung einer ganzrationalen Zielfunktion und der 5-Schritt-Vorgehensweise lösen.	6c)				
eine Extremwertaufgabe unter Einbeziehung der Koordinatengeometrie und ganzrationaler Modellfunktionen lösen.	6d)				
eine Extremwertaufgabe zur Gewinnmaximierung unter Verwendung einer ganzrationalen Zielfunktion und der 5-Schritt-Vorgehensweise lösen.	7a)				
durch Transformation der Variablen eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Stückzahl statt der Preissenkung herleiten.	7b)				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$. Ein Ausschnitt des Grafen von f ist im Folgenden dargestellt.



a) **Bestimme** alle Nullstellen von f.

b) **Berechne** f´(-1) und **interpretiere** diesen Wert geometrisch.

c) **Zeichne** die Tangente t an den Grafen von f im Punkt P(-1/-7) ein und **ermittle** zeichnerisch und rechnerisch eine Funktionsgleichung t(x) der Tangente t.

d) **Weise nach**, dass W(-2/-8) ein Rechts-Links-Wendepunkt mit waagerechter Tangente ist.

Aufgabe 2: Wahr oder falsch?

Entscheide begründend bei jeder der drei folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

a) Zwischen 2 Wendepunkten eines ganzrationalen Funktionsgrafen liegt **immer** 1 Extrempunkt.

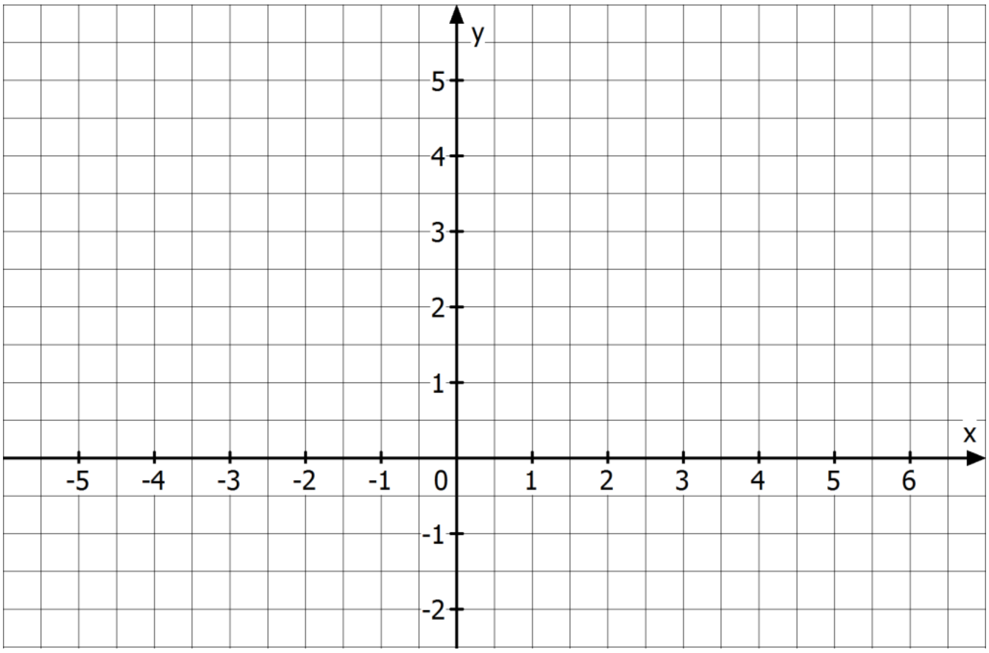
b) Zwischen 2 Extrempunkten eines ganzrationalen Funktionsgrafen liegt **immer** 1 Wendepunkt.

c) Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat **immer** 1 Wendestelle.

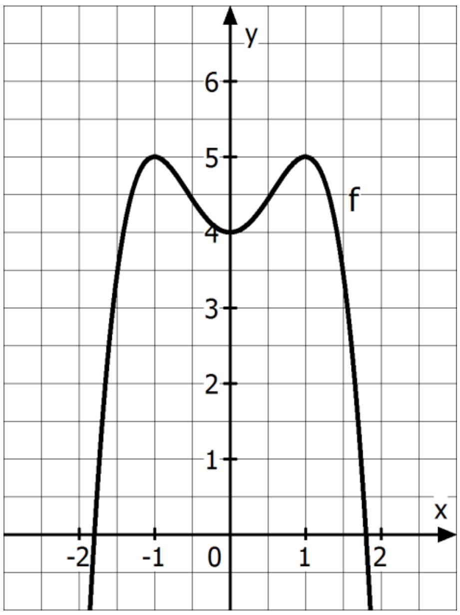
Aufgabe 3: Funktionseigenschaften[20]

a) **Skizziere** im nachfolgenden Koordinatensystem den Grafen einer Funktion g, wobei die folgenden Eigenschaften deutlich werden sollen:

$$\textbf{(1)}\ g(0) = 4 \qquad \textbf{(2)}\ g'(4) = 0 \qquad \textbf{(3)}\ g''(4) > 0$$



b) Gegeben ist der Graf einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades, der achsensymmetrisch zur y-Achse ist.



(1) **Gib** Bedingungsgleichungen **an**, welche die Funktionsgleichung des Grafen **eindeutig** festlegen und **markiere** die Informationen in der obigen Abbildung.

(2) **Ermittle** die Funktionsgleichung der GRF.

[20] modifiziert nach einem Vorschlag des Ministeriums als Vorbereitung auf Das Zentralabitur 2017

Teil II: Aufgaben unter Zuhilfenahme des GTR

Aufgabe 4: Steckbriefaufgaben

Skizziere mithilfe der Angaben den gesuchten Grafen und **ermittle** die dazugehörige Funktionsgleichung. Überprüfe Deine Lösung mit dem GTR.

a) Der Graf einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch und hat in W(1/3) einen Wendepunkt. Die Steigung an der Stelle x = 1 hat den Wert –2.

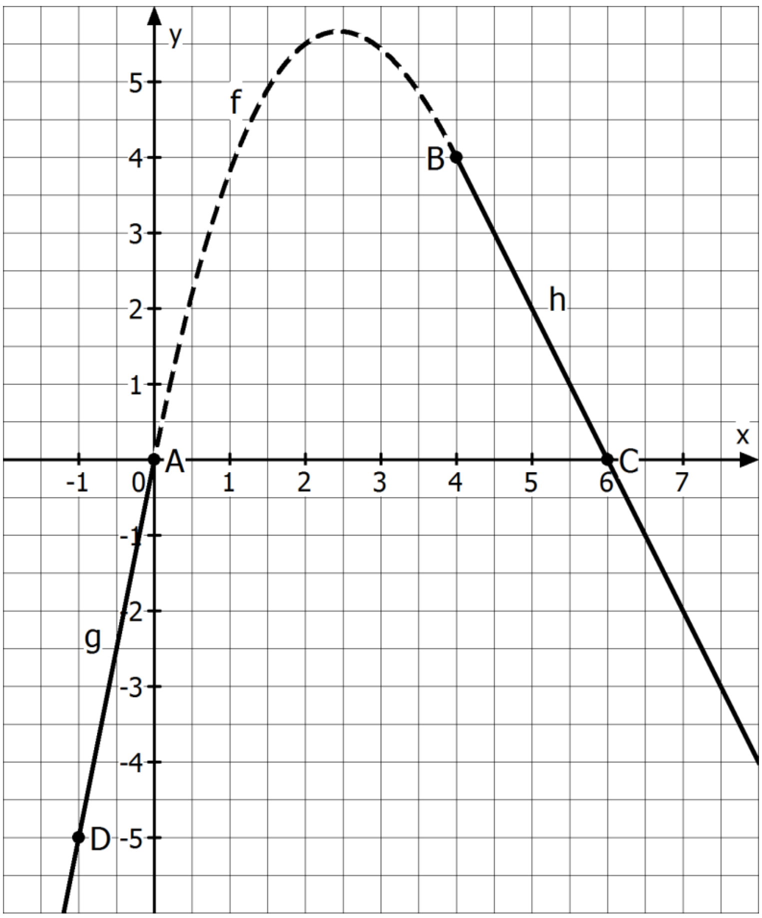
b) Der Graf einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, verläuft durch A(1/2) und hat für x = 1 eine waagerechte Tangente.

c) Gegeben sei folgender Steckbrief, der zu einer Schar von Parabeln führt: Eine nach unten geöffnete Normalparabel verläuft durch den Punkt (3/0).

   Bestimme die Funktionsgleichung der Parabelschar und **ermittle** in Abhängigkeit vom Scharparameter die zweite Nullstelle.

Aufgabe 5: Trassierung

Die Abbildung zeigt zwei geradlinig verlaufende Straßenstücke AC und BD. Es soll nun eine Kurve gefunden werden, welche die Straßenstücke miteinander verbindet. Die Übergänge von A und B sollen **sprungfrei und knickfrei** sein.



a) **Bestimme** Gleichungen der Geraden durch die Punkte A und C bzw. B und D.

b) **Erkläre**, was ein sprung- und knickfreier Übergang anschaulich bedeutet.

c) **Ermittle** eine Funktion dritten Grades, welche die vorgegebene Situation modelliert.

d) **Untersuche**, ob das Kurvenstück auch durch eine Parabel modelliert werden könnte.

e) **Zeige**, dass f in beiden Übergängen nicht krümmungssprungfrei ist und **begründe**, welchen Grad eine Funktion haben müsste, damit beide Übergänge krümmungssprungfrei sind.

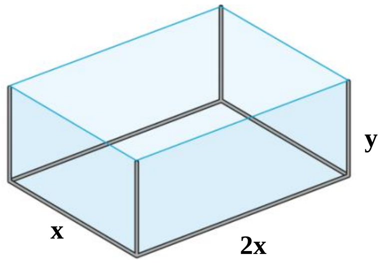
Aufgabe 6: Extremwertaufgaben

a) Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 900 cm². **Bestimme** die Seitenlängen des Rechtecks mit dem kleinsten Umfang und **gib** den minimalen Umfang **an**. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $U(x) = 2x + 1800x^{-1}$]

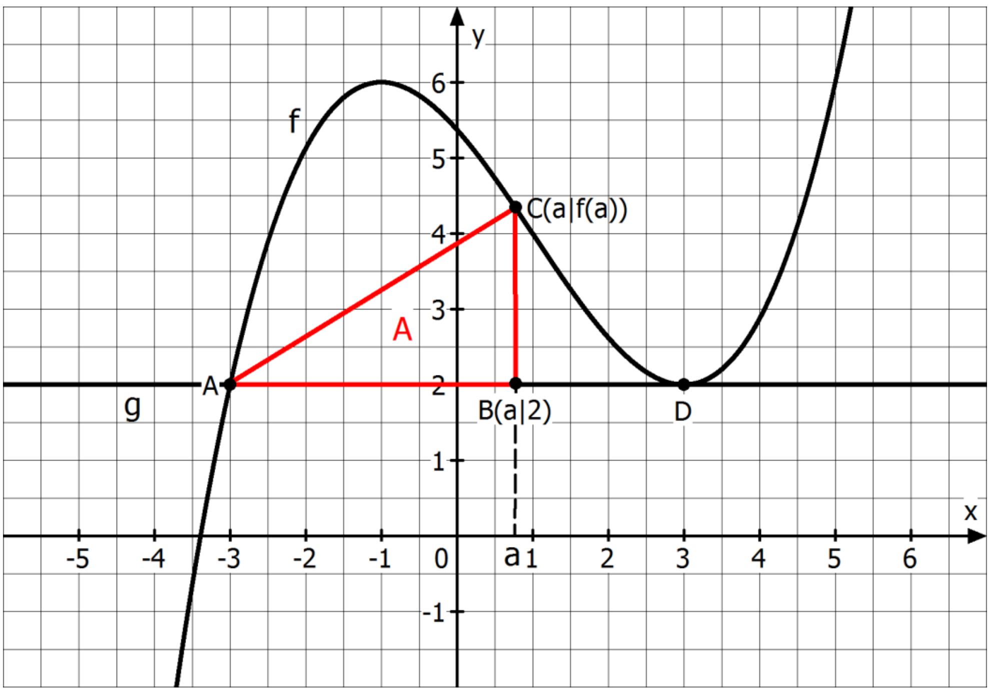
b) Es sollen zylinderförmige Blechdosen mit einem Volumen von 500 cm³ hergestellt werden. **Bestimme** den Radius r und Höhe h, damit der Blechverbrauch möglichst klein ist. (Die Blechstärke bleibt unberücksichtigt.)

c) Es soll ein nach oben offenes quaderförmiges Terrarium gebaut werden, das doppelt so lang wie breit ist (vgl. Abb. rechts). Stabilisiert wird es mithilfe von Winkeleisen. Zwei fortlaufende Meter Winkeleisen sind vorhanden. Welche Maße hat unter diesen Bedingungen ein Terrarium mit maximalen Volumen?

Ermittle die „optimalen" Maße des Terrariums. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $V(x) = x^2 - 3x^3$] (10P)



d) Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 43)$ schneidet die Gerade g mit g(x) = 2 in den Punkten A(-3/2) und D(3/2) (vgl. Abbildung). Für $-3 \leq a \leq 3$ bilden die Punkte A, B(a/2) und C(a/f(a)) ein Dreieck. **Bestimme** a, so dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



Aufgabe 7 (Gewinnmaximierung)

Ein Chemiker aus den USA behauptet, dass man zukünftig nicht mehr zu duschen brauche. Stattdessen könne man sich täglich mit seiner Bakterienlösung einsprühen. Die 250-ml-Flasche kostet 200 €. Die Herstellungskosten betragen 100 € pro 250-ml-Flasche. Im ersten Monat verkauft der Chemiker nur 100 Flaschen. Nun möchte er den Gewinn maximieren und nimmt an, dass bei einer Preissenkung um x € monatlich x^2 Kunden hinzugewonnen werden können.

a) **Untersuche**, wie stark der Preis reduziert werden muss, damit der monatliche Gewinn maximal wird. **Bestimme** die Anzahl der dabei monatlich verkauften Flaschen. [Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $G(x) = -x^3 + 100x^2 - 100x + 10000$]

b) Sei N die Anzahl der monatlich verkauften Flaschen. **Zeige:** Für den monatlichen Gewinn G gilt: $G(N) = N \cdot (100 - \sqrt{N - 100})$.

Lösungen

1 Noch fit? – Funktionsuntersuchung mit Steigung und Krümmung

Ableitungen (f´, f´´ und f´´´) bestimmen: $f'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 8$; $f''(x) = 3x - 8$; $f'''(x) = 3$

3a) Symmetrie: Es liegt keine besondere Symmetrie vor, da in f(x) Potenzen von x mit geraden und ungeraden Exponenten vorkommen

3b) Verhalten im Unendlichen/nahe Null: Das Verhalten im Unendlichen hängt von $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ab. Der Graf verläuft von links unten nach rechts oben. Das Verhalten nahe Null wird durch h(x) = 8x bestimmt. Der Graph nähert sich in der Umgebung von Null der Geraden y = 8x an.

3c) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: Für x = 0 gilt f(0) = 0. Daher ist der Ursprung Schnittpunkt des Graphen mit der x- und y-Achse. Für die weiteren Schnittpunkte mit der x-Achse gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 4$. Der weitere Schnittpunkt lautet (4/0). Insbesondere ist 4 eine doppelte Nullstelle.

3d) Extrempunkte:

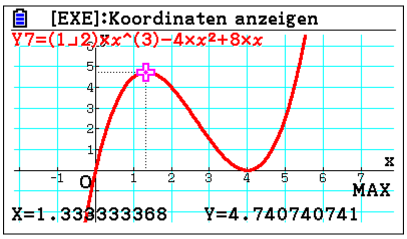
1) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $1{,}5x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ oder $x = 4$ Mögliche Kandidaten für lokale Extremstellen sind $\frac{4}{3}$ und 4.	2) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Maximumstelle $f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = +4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Minimumstelle 3) y-Werte der Extrempunkte: $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{128}{27}$ und $f(4) = 0$
Insgesamt gilt: H $\left(\frac{4}{3} / \frac{128}{27}\right)$ lokaler Hochpunkt und T(4/0) lokaler Tiefpunkt.	

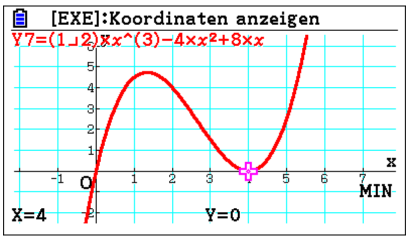
3e) Wendepunkte:

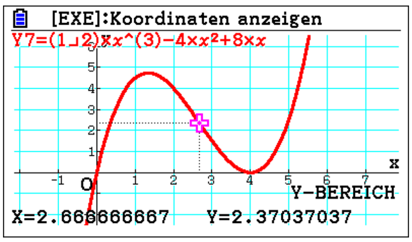
1) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$. Möglicher Kandidat für eine Wendestelle ist $\frac{8}{3}$	2) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ $f'''\left(\frac{8}{3}\right) = 3 > 0$: $\frac{8}{3}$ ist Re-Li-Wendestelle („ReLiPo") 3) y-Wertes des Wendepunktes: $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$
Insgesamt gilt: W $\left(\frac{8}{3} / \frac{64}{27}\right)$ ist Rechts-Links-Wendepunkt	

3f) Graph:

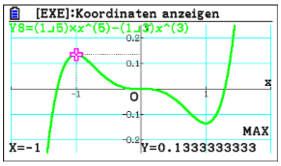
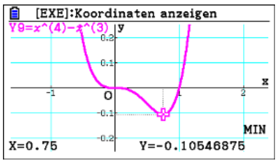
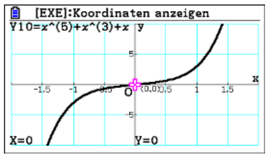
x	-0,25	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	-2,3	0	3,06	4,5	4,7	4	2,8	1,5	0,4	0	0,6	2,5





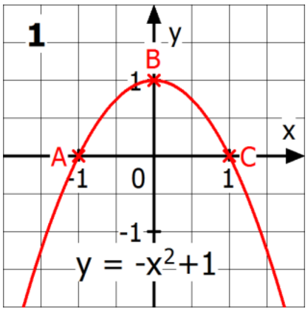


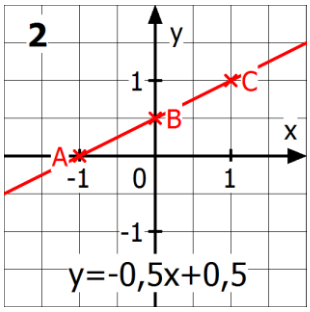
3g)

	$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$	$f(x) = x^4 - x^3$	$f(x) = x^5 + x^3 + x$
Symmetrie	Punktsymmetrie	keine Symmetrie	Punktsymmetrie
Verhalten an den Rändern	von links unten nach rechts oben	von links oben nach rechts oben	von links unten nach rechts oben
Verhalten nahe Null	wie $y = -\frac{1}{3}x^3$	wie $y = -x^3$	wie $y = x$
Extrempunkte	H(-1/0,13), T(1/-0,13)	T(0,75/-0,11)	
Wendepunkte	W(0/0) (Sattelpunkt)	W(0/0) (Sattelpunkt)	
Graf			

2 Ganzrationale Funktionen bestimmen

Aufgabe 1



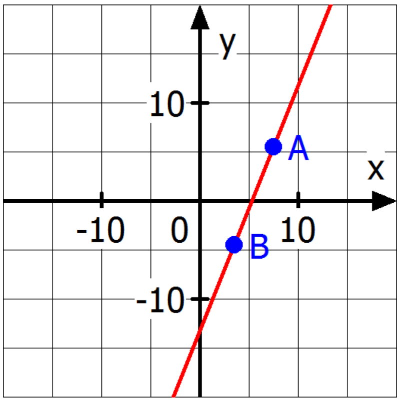
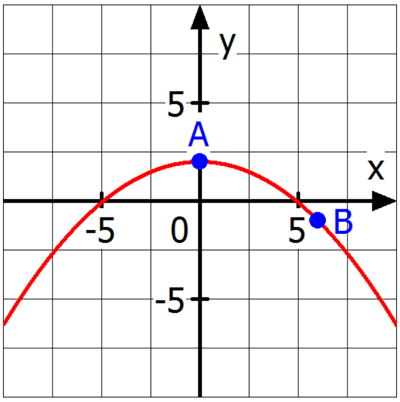
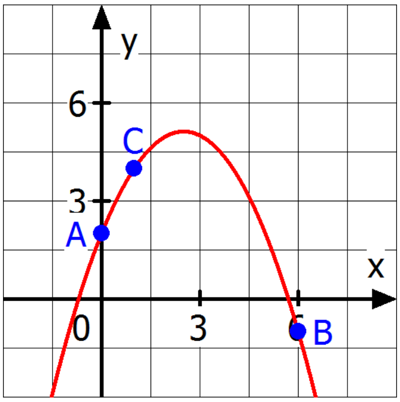


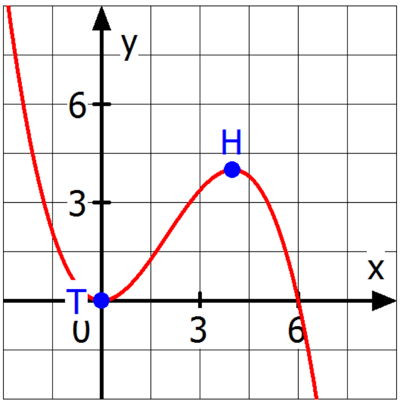
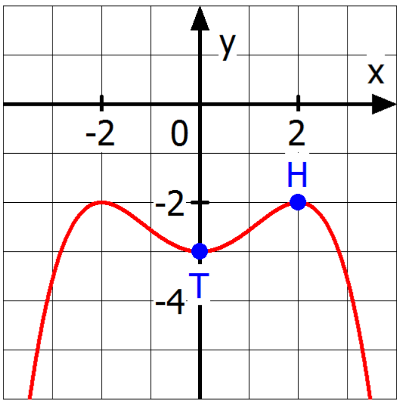
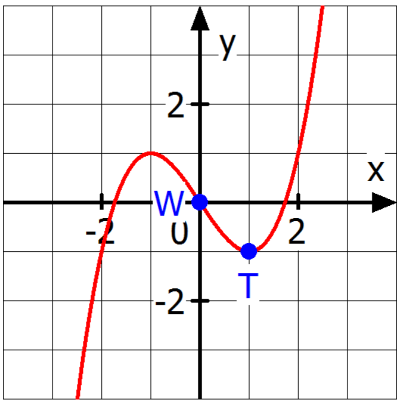
In Abbildung 1 ist nur eine Parabel möglich, in Abbildung 2 nur eine Gerade. In Abbildung drei ist kein Graf einer Funktion möglich.

Begründung: Würden in 1 die 3 Punkte auf einer Geraden liegen wäre die Steigung zwischen jeweils 2 Punkten immer eine andere. Die 3 Punkte in 2 können nicht auf einer Parabel liegen, da die mittlere Steigung zwischen je zwei Punkten immer konstant 1 ist. Dies ist bei einer Parabel nicht möglich. In 3 kann kein Graf einer Funktion durch die 3 Punkt verlaufen, da dann für den x-Wert 0,5 2 Funktionswerte existierten.

Die Funktionsgleichung der Parabel in 1 lautet y = -x² + 1, die der Geraden in 2 ist y = 0,5x + 0,5.

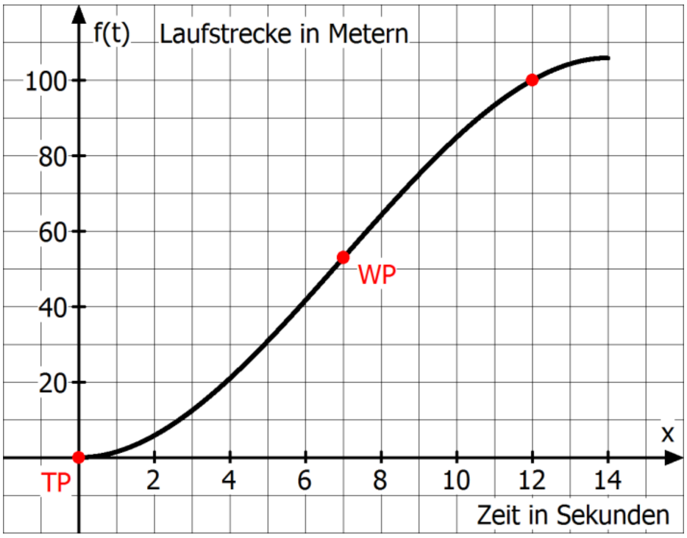
Aufgabe 2

		
Gerade	Parabel	Parabel durch 3 Punkte
$f(x) = 2{,}5x - 13{,}25$	$f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$	$f(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 2$

		
Funktion vom Grad 3	Symmetrischer Graf	Wendepunkt im Ursprung
$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$	$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

Aufgabe 3

a) Zur Bestimmung der 4 Parameter a, b, c und d benötigt man 4 Informationen. Im Graphen werden bei (0/0) ein lokaler Tiefpunkt markiert, bei x = 7 ein Wendepunkt sowie der Punkt (12/100) des Zieleinlaufes.



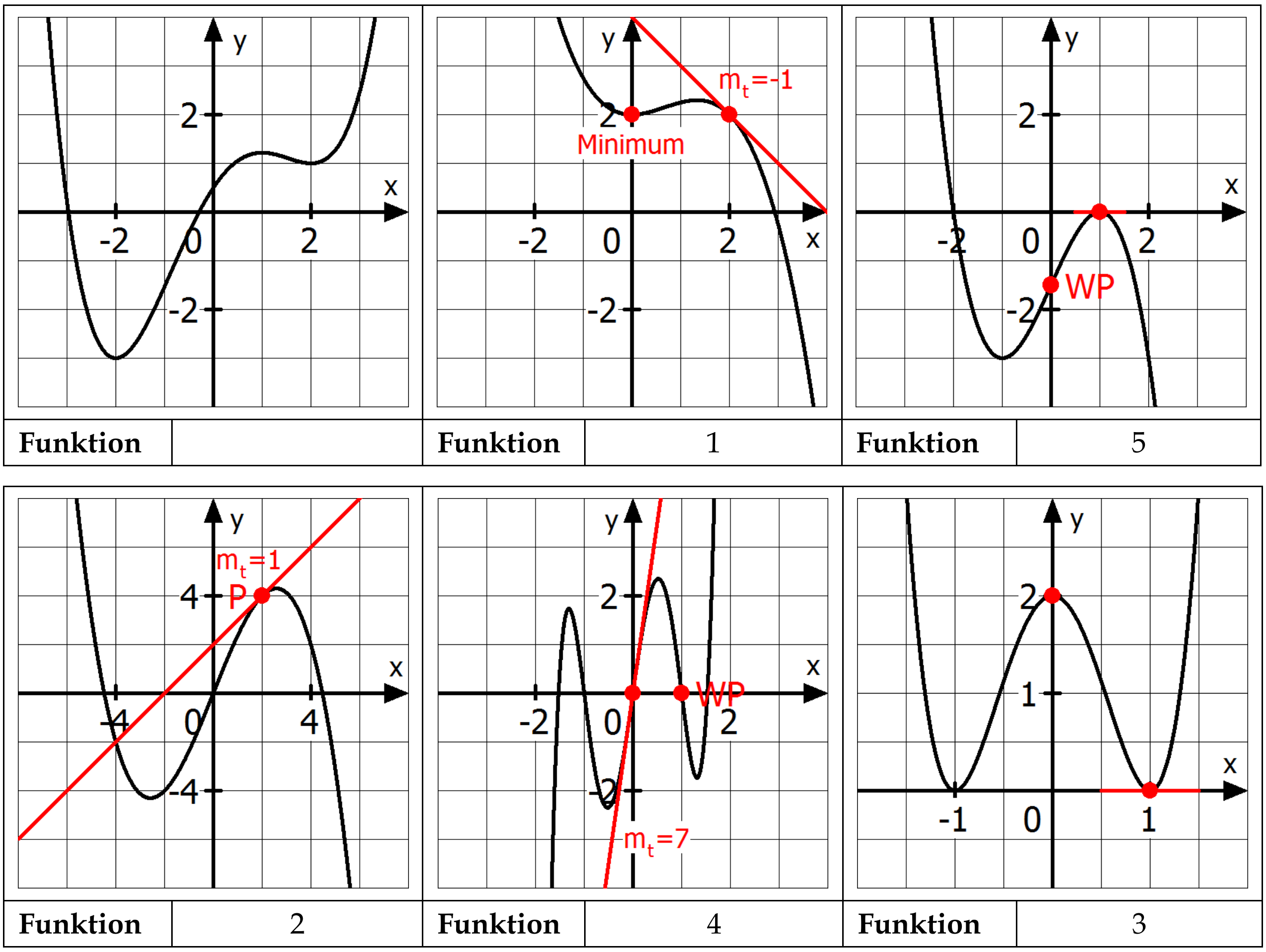
b) (I) $f(0) = 0$; (II) $f'(0) = 0$; (III) $f''(7) = 0$; (IV) $f(12) = 100$

c) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

d) (I) $d = 0$; (II) $c = 0$; (III) $42a + 2b = 0$ und (IV) $1728a + 144b = 100$

e) Der GTR liefert: $a = -\frac{25}{324}$ und $b = \frac{175}{108}$
$\Rightarrow f(x) = -\frac{25}{324}x^3 + \frac{175}{108}x^2$

Aufgabe 4



Der Graf oben links besitzt noch keinen Steckbrief. Es könnte sich um eine Parabel vierter Ordnung handeln, die die y-Achse bei (0/0,5) schneidet (1. Information) und bei (2/1) und bei (-2/-3) jeweils einen lokalen Tiefpunkt besitzt (für jeden Tiefpunkt jeweils 2 Informationen). Es wären aber auch andere Vorschläge denkbar. Insgesamt benötigt man 5 Informationen.

Aufgabe 5

Steckbriefe von Aufgabe 2

Gerade: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte A(7,5/5,5) und B(3,5/-4,5).
Ansatz: $f(x) = ax + b$; (1) $f(7{,}5) = 5{,}5 \Leftrightarrow 7{,}5a + b = 5{,}5$; (2) $f(3{,}5) = -4{,}5 \Leftrightarrow 3{,}5a + b = -4{,}5$;
Der GTR liefert a = 2,5 und b = -13,25. Also $f(x) = 2{,}5x - 13{,}25$

Parabel: Der Graf einer quadratischen Funktion hat bei A(0/2) einen Hochpunkt und verläuft durch den Punkt B(6/-1).
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c; f'(x) = 2ax + b;\ f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3)$f(6) = 1$ $\Leftrightarrow 36a + 6b + c = -1$. Setzt man die Lösungen für b und c in (1) ein und löst man (3) nach a auf ergibt sich $a = -\frac{1}{12}$. Insgesamt ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$.

Parabel durch 3 Punkte: Der Graf einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A(0/2), B(6/-1) und C(1/4).
Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; (1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f(6) = 1 \Leftrightarrow 36a + 6b + c = -1$; (3) $f(1) = 4$ $\Leftrightarrow a + b + c = 4$;. Insgesamt ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 2$.

Funktion vom Grad 3: Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat in T(0/0) einen Tiefpunkt und in H(4/4) einen Hochpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$; (2) $f'(0) = 0$ $\Leftrightarrow c = 0$; (3) $f(4) = 4 \Leftrightarrow 256a + 16b + c + d = 4$; (4) $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$
Mithilfe des GTR erhält man $a = -\frac{1}{8}; b = \frac{3}{4}; c = d = 0$ Also $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

Symmetrischer Graf: Der Graf einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 ist symmetrisch zur y-Achse, hat in H(2/-2) einen Hochpunkt und in T(0/-3) einen Tiefpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c; f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ (1) $f(2) = 2 \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 2$; (2) $f'(2) = 0$ $\Leftrightarrow 32a + 4b = 0$; (3) $f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3$; (4) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Bedingung (4) ist immer erfüllt bei geraden GRF, da sie im Ursprung immer eine Extremstelle haben. Dies wurde im Ansatz bereits ausgenutzt. Der GTR liefert $a = -\frac{1}{16}; b = \frac{1}{2}; c = 3$. Also $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$.

Wendepunkt im Ursprung: Der Graf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und in T(1/-1) einen Tiefpunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$; (1) $f(1) = -1 \Leftrightarrow a + b = -1$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$;
Der GTR liefert $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{3}{2}$. Also $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. Die Tatsache, dass der Ursprung ein Wendepunkt ist, der auf dem Grafen liegt wurde durch den Ansatz bereits ausgenutzt. Denn jede ungerade GRF hat im Ursprung einen Wendepunkt.

Steckbriefe von Aufgabe 4

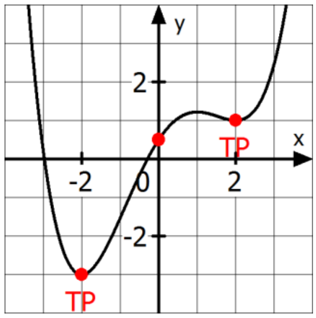
Funktion 2: Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung hat in (2/4) eine Tangente parallel zur 1. Winkelhalbierenden.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$; (1) $f(2) = 4 \Leftrightarrow 8a + 2b = 4$; (2) $f'(2) = -1$ $\Leftrightarrow 12a + b = -1$. Der GTR oder der Kopf liefert $a = -\frac{3}{8}$ und $b = \frac{7}{2}$. Also $f(x) = -\frac{3}{8}x^3 + \frac{7}{2}x$.

Funktion 3: Eine zur x-Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung geht durch (0/2) und hat in (1/0) die Steigung Null.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c; f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ (1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$; (2) $f(1) = 0$ $\Leftrightarrow a + b + c = 0$; (3) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$. Der GTR liefert $a = 2; b = -4; c = 2$.
Also $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Funktion 4: Eine zum Ursprung punktsymmetrische Parabel 5. Ordnung hat in (0/0) die Gerade t mit der Gleichung t(x) = 7x als Tangente und in (1/0) einen Wendepunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$; $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$; $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$; (1) $f'(0) = 7$ $\Leftrightarrow c = 7$; (2) $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$; (3) $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 20a + 6b = 0$.
Der GTR liefert a = 3, b = -10 und c = 7. Also $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x$.

Funktion 5: Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse in (1/0) und hat in (0/-1,5) einen Wendepunkt.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; (1) $f(0) = -1{,}5$ $\Leftrightarrow d = -1{,}5$; (2) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3) $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$; (4) $f'(1) = 0$ $\Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$. Der GTR liefert $a = -0{,}75$; $b = 0$; $c = 2{,}25$ und d = -1,5.
Also $f(x) = -0{,}75x^3 + 2{,}25x - 1{,}5$.

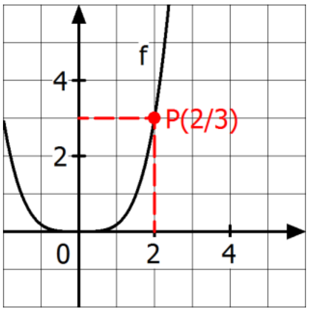
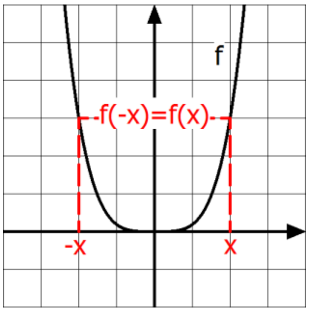
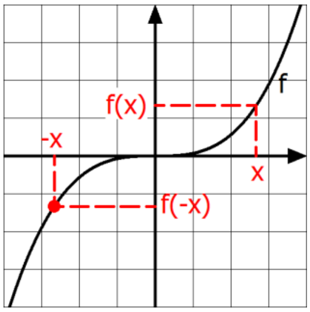
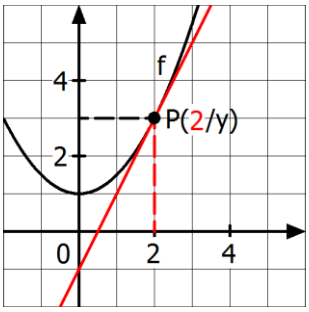
Funktion ohne Steckbrief: Es könnte sich um eine Parabel vierter Ordnung handeln, die die y-Achse bei (0/0,5) schneidet und bei (2/1) und bei (-2/-3) jeweils einen lokalen Tiefpunkt besitzt.
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

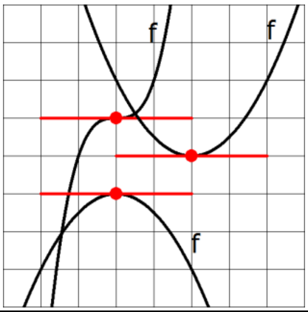
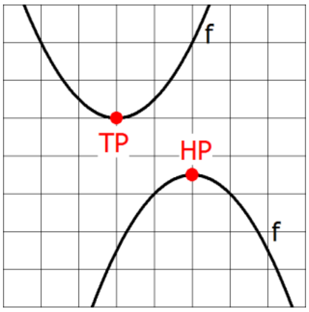
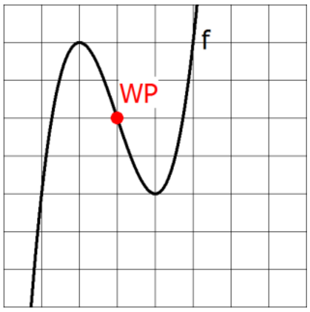
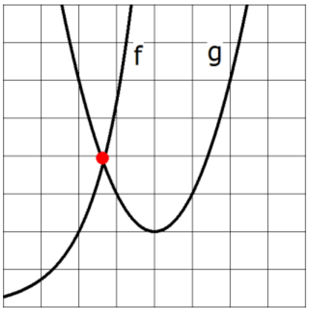


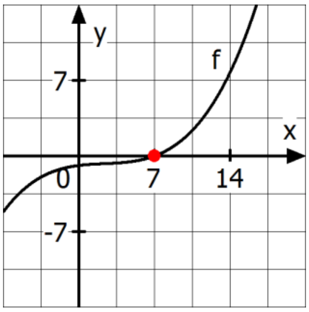
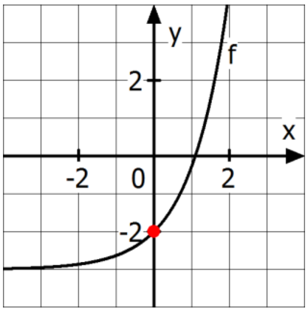
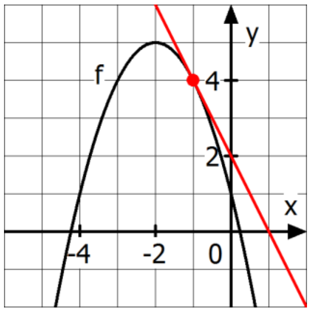
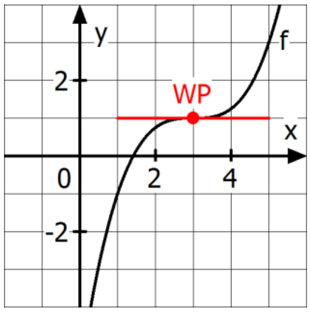
(1) $f(0) = 0{,}5 \Leftrightarrow e = 0{,}5$;
(2) $f(2) = 1 \Leftrightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 1$;
(3) $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0$;
(4) $f(-2) = -3 \Leftrightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + e = -3$
(5) $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow -32a + 12b - 4c + d = 0$.
Mit dem GTR folgt: $a = \frac{3}{32}$; $b = -\frac{1}{8}$; $c = -\frac{3}{4}$; $d = \frac{3}{2}$; $e = 0{,}5$
$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

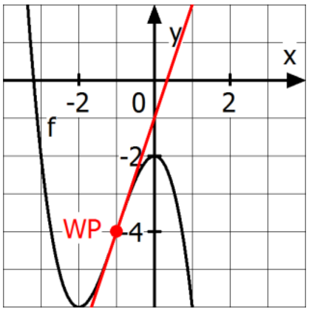
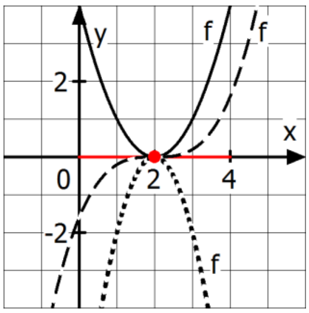
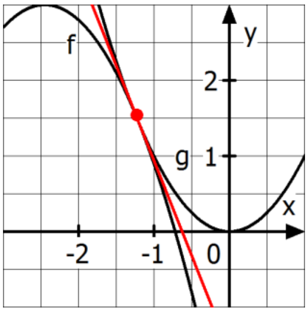
Aufgabe 6

Textform	Bedingungsgleichung(en)
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	f(2) = 3
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	f(x) = f(-x) oder bei GRF f(x) hat nur gerade Potenzen von x.
Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.	f(x) = - f(-x) oder bei GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.
Der Graph von f hat bei x = 3 die Steigung 2.	f´(3) = 2
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	f(1) = 3 ∧ f´(1) = 0
Der Punkt (2/1) ist ein lokaler Extrempunkt.	f(2) = 1 ∧ f´(2) = 0
Der Punkt (0/3) ist ein Wendepunkt.	f(0) = 3 ∧ f´´(0) = 0
G_f schneidet G_g mit $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).	f(1) = g(1) = 5 ∧ f´(1) ≠ g´(1)
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	f(7) = 0
Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	f(0) = -2
G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit g(x) = -2x + 2.	f(-1) = g(-1) = 4 ∧ f´(-1) = -2
G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.	f(3) = 1 ∧ f´(3) = 0 ∧ f´´(3) = 0
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente y = 3x – 1.	f(-1) = g(-1) = -4 ∧ f´(-1) = 3 ∧ f´´(-1) = 0
Der Graph von f berührt die x-Achse bei x = 2.	f(2) = 0 ∧ f´(2) = 0
G_f berührt G_g mit $g(x) = 5x^2 – 4$ in (-1/y).	f(-1) = g(-1) = 1 ∧ f´(-1) = g´(-1) = -10

			
(2/3) liegt auf dem Graphen von f.	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung.	Der Graph von f hat bei x = 3 die Steigung 2.
$f(2) = 3$	$f(x) = f(-x)$; GRF f(x) haben nur gerade Potenzen von x.	$f(x) = -f(-x)$; GRF f(x) hat nur ungerade Potenzen von x.	$f'(3) = 2$

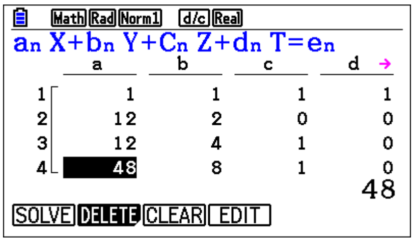
			
Bei (1/3) liegt eine horizontale Tangente.	Der Punkt (2/1) ist ein lokaler Extrempunkt.	Der Punkt (0/3) ist ein Wendepunkt.	G_f **schneidet** G_g mit der Gleichung $g(x) = 2x^2 + 3$ in (1/y).
$f(1) = 3 \wedge f'(1) = 0$	$f(2) = 1 \wedge f'(2) = 0$	$f(0) = 3 \wedge f''(0) = 0$	$f(1) = g(1) = 5 \wedge g'(1) \neq g'(1)$

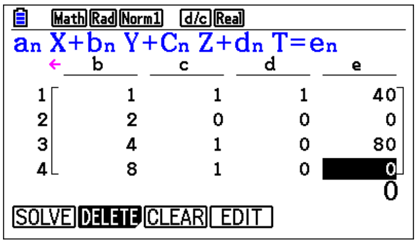
			
Der Graph von f schneidet die x-Achse bei x = 7.	Der Graph schneidet die y-Achse bei y = -2.	G_f hat in (-1/y) die Tangente g mit $g(x) = -2x + 2$.	G_f hat in (3/1) einen Sattelpunkt.
$f(7) = 0$	$f(0) = -2$	$f(-1) = g(-1) = 4 \wedge f'(-1) = -2$	$f(3) = 1 \wedge f'(3) = 0 \wedge f''(3) = 0$

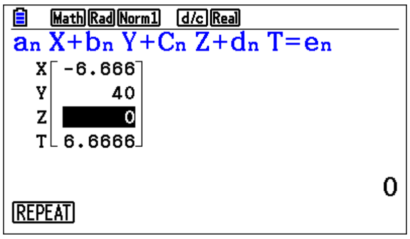
			
G_f hat in (-1/y) die Wendetangente $y = 3x - 1$.	Der Graph von f berührt die x-Achse bei x = 2.	G_f **berührt** G_g mit der Gleichung $g(x) = 5x^2 - 4$ in (-1/y).	
$f(-1) = g(-1) = -4 \wedge f'(-1) = 3$ $\wedge f''(-1) = 0$	$f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$	$f(-1) = g(-1) = 1$ $\wedge f'(-1) = g'(-1) = -10$	

Aufgabe 7

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$;
Sei t = 0 der Zeitpunkt 20 Uhr. Dann erhält man die folgenden Bedingungen:
(1) Um 21 Uhr sind 40 Besucher im Festzelt: $f(1) = 40 \Leftrightarrow a + b + c + d = 40$
(2) Der größte Andrang besteht um 22 Uhr: $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 2b = 0$
(3) Um 22 Uhr beträgt der Andrang 80 Besucher pro Stunde: $f'(2) = 80 \Leftrightarrow 12a + 4b + c = 80$
(4) Um Mitternacht sind die meisten Besucher im Zelt: $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$
Man löst das LGS mit dem GTR und erhält $a = -\frac{20}{3}$; $b = 40$; $c = 0$; $d = \frac{20}{3}$.
Also $f(x) = -\frac{20}{3}x^3 + 40x^2 + \frac{20}{3}$.







Aufgabe 8

Beispiel 1: Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ (f ist ungerade). (1) $f(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$ ergibt mit dem GTR die Lösungen $a = -1$ und $b = 3$, d. h. man erhält $f(x) = -x^3 + 3x$. Dieser Steckbrief ist **eindeutig** bestimmt, da es genau eine Lösung gibt. [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bzw. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ wählen können. Die Bedingungen lauten wegen der Symmetrie zum Ursprung: (1) $f(1) = 2 \Leftrightarrow a + b + c + d = 2$; (2) $f(-1) = -2 \Leftrightarrow -a + b - c + d = -2$; (3) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$; (4) $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - b + c = 0$. Diese vier Bedingungen hätten zu einem LGS geführt, bei dem $b = d = 0$ und $a = -1$ und $c = 3$ sind.]

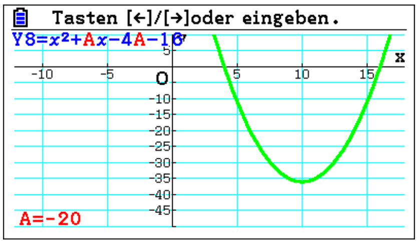
Beispiel 2: Ansatz: $f(x) = ax^2 + b$. Denn: Die Bedingung $f'(0) = 0$ bedeutet bei einer Parabel, dass der Scheitelpunkt der Parabel bei (0/b) liegt, so dass mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - 0)^2 + b$ folgt. (1) $f(0) = 4 \Leftrightarrow b = 4$ (2) $f(1) = 3 \Leftrightarrow a + 4 = 3 \Leftrightarrow a = -1$. Es ergibt sich $f(x) = -x^2 + 4$. Die dritte Bedingung $f(2) = 0$ ist offenbar auch erfüllt, denn die obige Parabel hat 2 als Nullstelle. Dieser Steckbrief ist **überbestimmt**, da mehr Informationen als notwendig gegeben wurden. [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f'(x) = 2ax + b$ wählen können. Mit den Bedingungen (1) $f(0) = 4 \Leftrightarrow c = 4$; (2) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$; (3) $f(1) = 3 \Leftrightarrow a + b + c = 3$ erhält man für $a = -1$. Die Bedingung (4) lautet $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow a = -1$ und bestätigt nur noch einmal Bedingung (3).]

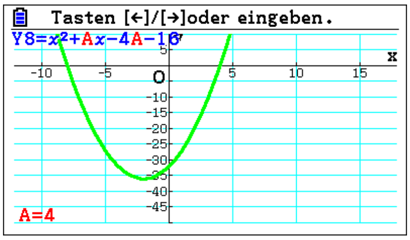
Beispiel 3: Ansatz: $f(x) = a\cdot(x - 1)^2 + b$. Denn: Die Bedingung $f'(1) = 0$ bedeutet bei einer Parabel, dass der Scheitelpunkt der Parabel bei (1/b) liegt, so dass mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - 1)^2 + b$ folgt. Ferner gilt: (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$; (2) $f(2) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$. In beiden Fällen erhält man die Bedingung $a + b = 0$. Bedingung (1) und (2) sind liefern also die gleiche Information. Dies ist klar, da folgendes gilt: Der Ursprung liegt genau dann auf einer Parabel mit Scheitelpunkt (1/b), wenn der Punkt (2/0) auf der Parabel liegt. Man hat unendlich viele Parabeln, für die $a + b = 0$ ist. Formt man die Bedingung $a + b = 0$ etwa nach a um ergibt sich $a = -b$. Setzt man a in die allgemeine Funktionsgleichung ein, gilt: $f_a(x) = a\cdot(x - 1)^2 - a = ax^2 - 2ax$. Dieser Steckbrief ist **unterbestimmt** und erzeugt eine Parabelschar mit (vgl. Infoblock). [Alternativ hätte man auch den Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f'(x) = 2ax + b$ wählen können. Mit den Bedingungen (1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$; (2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$; (3) $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 0$ erhält man bei (2) als auch bei (3) dieselbe Gleichung $2a + b = 0$ oder $b = -2a$. Daher folgt wie oben $f_a(x) = ax^2 - 2ax$.]

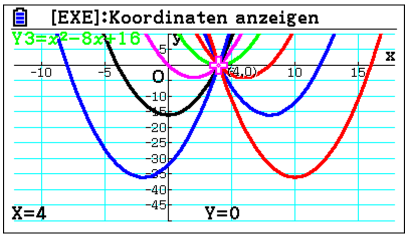
Aufgabe 9

a) Ansatz $f(x) = x^2 + ax + b$.
Bedingung (1) $f(4) = 0 \Leftrightarrow 16 + 4a + b = 0 \Leftrightarrow b = -16 - 4a$
Daher folgt wie oben $f_a(x) = x^2 + ax - 16 - 4a$.

b) Die Tiefpunkte scheinen auf einer Parabel zu liegen, wie die folgende Abbildungen zeigen zeigt.

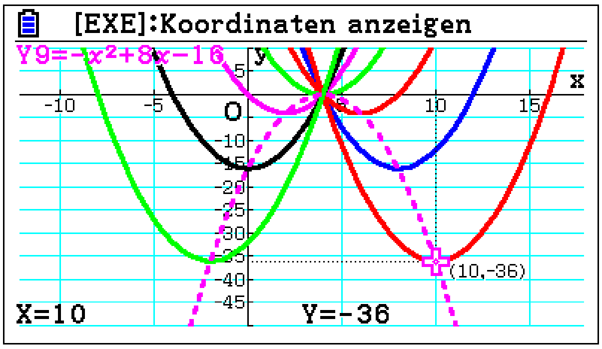






c) $f_a(x) = x^2 + ax - 16 - 4a = 0$. Die Diskriminante lautet: $D = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 16 + 4a = \frac{a^2}{4} + 4a + 16$. Die Diskriminante ist Null genau dann, wenn $\frac{a^2}{4} + 4a + 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 16a + 64 = 0 \Leftrightarrow (a+8)^2 = 0$.
Also für $a = -8$ ist die Diskriminante Null. Der Graph zu f_{-8} hat daher genau eine Nullstelle.

d) Man rechnet nach $f_a'(x) = 2x + a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 16 - 4a$
$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 4a - 16 = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16$ Man erhält die Schar der lokalen Tiefpunkte:
$T_a\left(-\frac{a}{2} / -\frac{a^2}{4} - 4a - 16\right)$. Also gilt für den x- und y-Wert
$x = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2x$ und $y = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16$.
Setzt man a in die Gleichung für y ein ergibt sich:
$y = -\frac{a^2}{4} - 4a - 16 = -\frac{(-2x)^2}{4} - 4(-2x) - 16 = -x^2 + 8x - 16$.
Alle Tiefpunkte liegen als auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + 9x - 16$



e) $x^2 + a_1x - 4a_1 - 16 = x^2 + a_2x - 4a_2 - 16 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)x = 4(a_1 - a_2) \underset{:(a_1-a_2)\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 4$.

3 Trassierungsaufgaben

Aufgabe 1

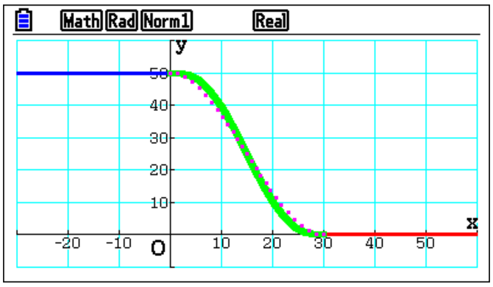
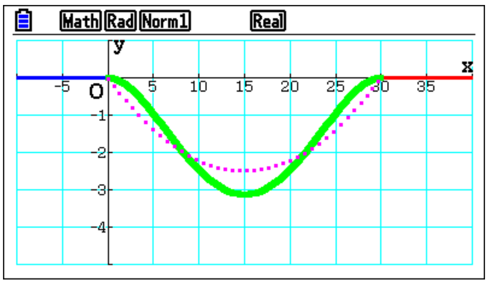
a) Die **erste Abbildung** hat offenbar die Funktionsgleichung: $f(x) = 50 - \frac{5}{3}x$ (Steigung und y-Achsenabschnitt ablesen). Die **zweite Kurve** ist der Ast einer Parabel mit der Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2 + 50$. Setzt man den Punkt (30/0) in die Gleichung ein, erhält man $0 = a \cdot 30^2 + 50$. Also folgt $a = -\frac{50}{900} = -\frac{1}{18} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + 50$. Die **dritte Parabel** könnte der Ausschnitt einer Parabel dritter Ordnung sein mit der Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Hier gelten die Bedingungen: (1) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$; (2) $f(30) = 0 \Leftrightarrow 27000a + 900b + 30c + 50 = 0 \Leftrightarrow 27000a + 900b + 30c = -50$ (3) $f'(30) = 0 \Leftrightarrow 2700a + 60b + c = 0$. Der GTR liefert $a = \frac{1}{270}5$; $b = -\frac{1}{6}$; $c = 0 \Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{270}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + 50$.

b) 1 und 2 sind ungeeignet, auch wenn für Lösung 1 der Materialbedarf am geringsten ist (kürzeste Verbindung der Übergänge). Denn in beiden Lösungen liegt bei mindestens einem Übergang ein Steigungssprung vor. 3 ist am besten geeignet. Hier stimmen bei den Übergangspunkten Übergängen sowohl die Funktionswerte als auch die Funktionswerte der ersten Ableitung überein.

c)

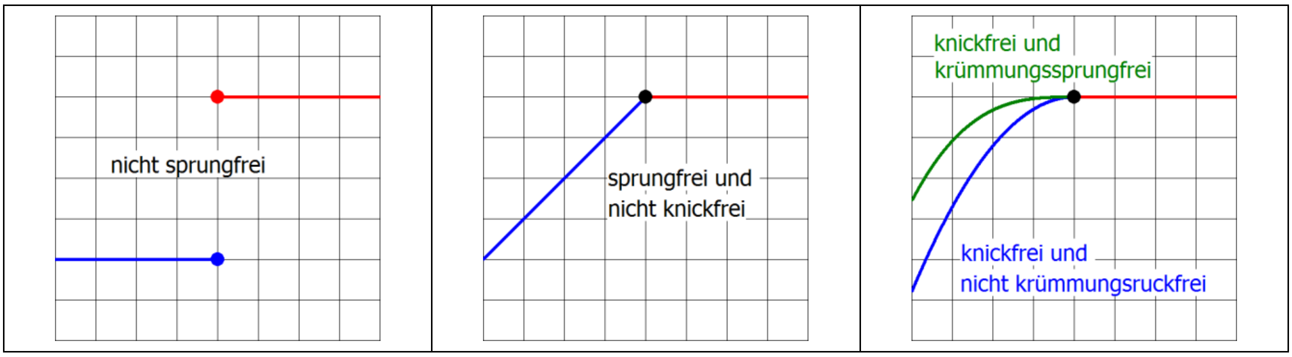
Da der Ingenieur fordert, dass in den Übergangsstellen Wendestellen vorliegen sollen, müsste die Funktion mindestens drei Wendestellen haben (im Intervall [0; 30] liegt ein Krümmungswechsel vor). Daher muss diese Modellfunktion mindestens den Grad 5 haben. Die Forderung des Ingenieurs ist sinnvoll, da es durch die beiden Wendestellen zu keiner ruckhaften bzw. sprunghaften Änderung der Fahrtrichtung kommt. Die Forderung, dass an beiden Übergängen Wendestellen vorliegen müssen, ist gleichbedeutend mit den zusätzlichen Bedingungen $f''(0) = f''(30) = 0$.

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 50$; $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$;
$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$.
(1) $f'(0) = 0 \Leftrightarrow e = 0$
(2) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(3) $f(30) = 0 \Leftrightarrow 30^5a + 30^4b + 30^3c = -50$;
(4) $f'(30) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 30^4a + 4 \cdot 30^3b + 3 \cdot 30^2c = 0$
(5) $f''(30) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot 30^3a + 12 \cdot 30^2b + 180c = 0$.
Mit dem GTR folgt für die Gleichungen (3) bis (5): $a = -\frac{1}{81000}$; $b = \frac{1}{1080}$; $c = -\frac{1}{54}$;
$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{81000}x^5 + \frac{1}{1080}x^4 - \frac{1}{54}x^3 + 50$. (grüner Graf; gestrichelter Graf ist der Graf 3)

	
In dieser Abbildung ist erkennbar, dass die Übergänge bei der GRF fünften Grades „geschmeidiger" sind als beim gestrichelten Graf 3 einer GRF dritten Grades.	Deutlicher wird dies, wenn man die Ableitungsgrafen betrachtet. Hier erkennt man, dass die Übergänge beim gestrichelten Grafen nicht knickfrei sind.

Aufgabe 2

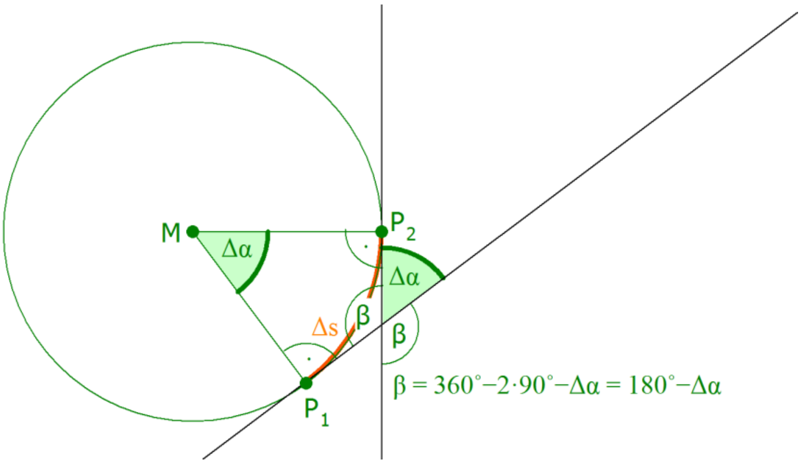
a)



b)

Bei einer Geraden gibt es keine Richtungsänderung. Daher gilt für die mittlere Krümmung überall $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{0}{\Delta s} = 0$. Es gilt folglich für die lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{0}{\Delta s} = 0$.

Für den Kreis betrachte man folgende Abbildung:



Mit $\Delta s = \Delta\alpha \cdot r$ (α im Bogenmaß) folgt für die mittlere Krümmung $\Delta\kappa = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha \cdot r} = \frac{1}{r}$. Daher folgt für die lokale Krümmung $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$.

c)

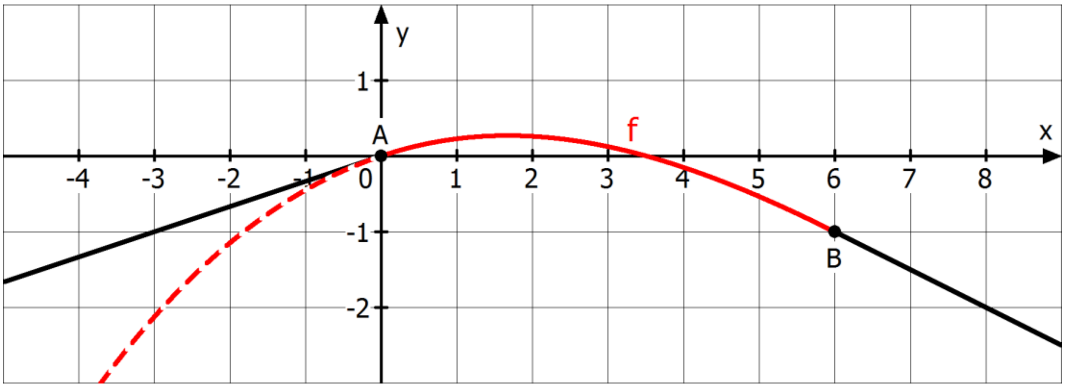
Sei a Extremstelle. Dann gilt $f'(a) = 0$. Also: $\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+0^2)^{1,5}} = f''(a)$.

Sei a Wendestelle. Dann gilt $f''(a) = 0$. Also: $\kappa(a) = \frac{0}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}} = 0$.

Ist der Graf $\begin{Bmatrix} \text{rechtsgekrümmt} \\ \text{linksgekrümmt} \end{Bmatrix}$ an einer Stelle a, gilt $f''(a) \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 0$. Daher folgt für die Krümmung $\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+[f'(a)]^2)^{1,5}} \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 0$, da der Nenner stets positiv ist.

Aufgabe 3

a)



Legt man den Ursprung z. B. in den Ursprung auf den ersten Übergangspunkt A und wählt für eine Kästchenlänge eine Längeneinheit erhält man folgende vier Bedingungen:

(1) $f(0) = 0$ (2) $f'(0) = \frac{1}{3}$ (3) $f(6) = -1$ (4) $f'(6) = -\frac{1}{2}$

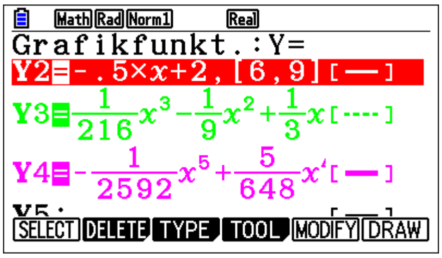
Daher ist der Ansatz einer GRF dritten Grades geeignet (man kann mit ein wenig Nachdenken oder durch Nachrechnen zeigen, dass keine GRF zweiten Grades die vier Bedingungen erfüllen kann):
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
(1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(2) $f'(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$
(3) $f(6) = -1 \Leftrightarrow 216a + 36b + 6c = -1 \underset{c=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 216a + 36b = -3$
(4) $f'(6) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 108a + 12b + c = -\frac{1}{2} \underset{c=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 108a + 12b = -\frac{5}{6}$
Der GTR liefert: $a = \frac{1}{216}; b = -\frac{1}{9}$. Mit $c = \frac{1}{3}$ folgt $f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x$.

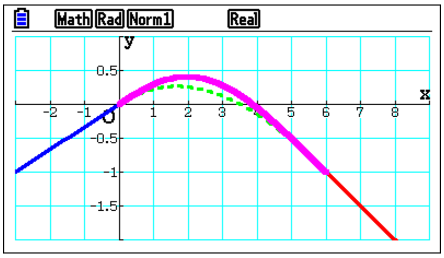
Anmerkung: Wählt man den Punkt B als Ursprung des Koordinatensystems erhält man die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{216}x^3 - \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{2}x$.

b)

Man hat $f''(0)$ und $f''(6)$ zu berechnen und zu zeigen, dass diese Werte ungleich Null sind, da die geraden Anschlussstücke an den Stellen 0 und 6 als zweite Ableitung konstant Null sind. Es gilt $f''(x) = \frac{1}{36}x - \frac{2}{9}$. Daher gilt $f''(0) = -\frac{2}{9} \neq 0$ und $f''(6) = -\frac{1}{16} \neq 0$. Also ist f an den Stellen x = 0 bzw. x = 6 nicht krümmungssprungfrei. Eine solche Funktion müsste sechs Bedingungen erfüllen, hätte also mindestens fünften Grad. Der Ansatz lautet: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$;
$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$; $f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$. Die 6 Bedingungen sind:
(1) $f(0) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (2) $f'(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e = \frac{1}{3}$ (3) $f''(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
(4) $f(6) = -1 \Leftrightarrow 6^5a + 6^4b + 6^3c + 36d + 6e + f = -1 \underset{d=f=0;e=\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow} 6^5a + 6^4b + 6^3c = -3$
(5) $f'(6) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5 \cdot 6^4a + 4 \cdot 6^3b + 3 \cdot 6^2c + 12d + e = -\frac{1}{2} \underset{d=0;e=\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow} 5 \cdot 6^4a + 4 \cdot 6^3b + 3 \cdot 6^2c = -\frac{5}{6}$
(6) $f''(6) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot 6^3a + 12 \cdot 6^2b + 36c + 2d = 0 \underset{d=0}{\Leftrightarrow} 20 \cdot 6^3a + 12 \cdot 6^2b + 36c = 0$.
Mit dem GTR folgt für die Gleichungen (4) bis (6): $a = -\frac{1}{2592}; b = \frac{5}{648}; c = -\frac{5}{108}$. Mit d = f = 0 bzw. e $= \frac{1}{3}$ folgt: $f(x) = -\frac{1}{2592}x^5 + \frac{5}{648}x^4 - \frac{5}{108}x^3 + \frac{1}{3}x$.

Der fettgedruckte Graf garantiert im Gegensatz zum gestrichelten Grafen krümmungssprungfreie Übergänge





Aufgabe 4

a) $f_{b,d}(0) = 50 \Leftrightarrow \frac{d^2}{b} = 50 \Leftrightarrow d^2 = 50b$ und $f_{b,d}(30) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} \cdot (d - 900)^2 = 0 \Leftrightarrow d = 900$. Also $b = \frac{d^2}{50} = 16200$.

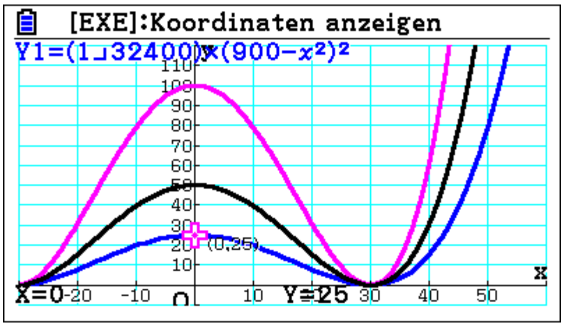
b) Es gilt nach der 2. binomischen Formel: $f_{b,d}(x) = \frac{1}{b} \cdot (d - x^2)^2 = \frac{1}{b} \cdot (d^2 - 2dx^2 + x^4)$. Daher folgt $f_{b,d}{'}(x) = \frac{1}{b} \cdot (4x^3 - 4dx) = \frac{4}{b}(x^3 - dx)$

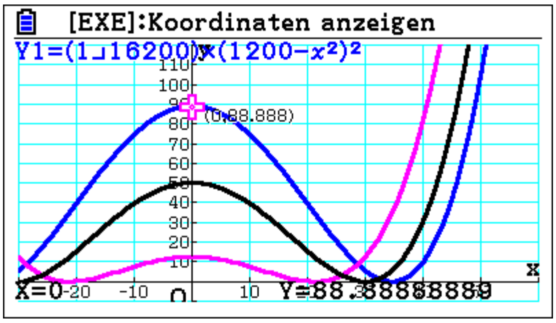
[mit der Kettenregel („innere mal äußere Ableitung“), die wir in der Q2 kennenlernen, geht es schneller: $f_{b,d}{'}(x) = \frac{1}{b} \cdot 2 \cdot (d - x^2)(-2x) = \frac{4}{b} \cdot (x^2 - d)x = \frac{4}{b}(x^3 - dx)$]

Nun folgt: $f_{b,d}{''}(x) = \frac{4}{b}(3x^2 - d)$. Setze b = 16200 und d = 900 ein und man erhält:
$f_{16200,900}{'}(x) = \frac{1}{16200}(x^3 - 900x)$ und $f_{16200,900}{''}(x) = \frac{1}{4050}(3x^2 - 900)$.
Es gilt $f_{16200,900}{'}(30) = f_{16200,900}{'}(0) = 0$.
Allerdings gilt $f_{16200,900}{''}(0) = -\frac{900}{4050} \neq 0$ und $f_{16200,900}{''}(30) = \frac{1800}{4050} = \frac{4}{9} \neq 0$. Daher sind die Übergänge sprung-, aber nicht krümmungssprungfrei.

c) $f_{16200,900}{''}(x) = \frac{1}{4050}(3x^2 - 900) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 900 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{300} \approx \pm 17{,}32$.
$f_{16200,900}{'''}(x) = \frac{x}{625} = \frac{1}{625}x$
$f_{16200,900}{'''}(\sqrt{300}) = \frac{1}{625}\sqrt{300} > 0$ und $f_{16200,900}(\sqrt{300}) = \frac{20}{9}$: Re-Li-Wendepunkt $W(17\frac{1}{3}/22\frac{2}{9})$.

d) Es gilt $f_{b,d}(0) = \frac{d^2}{b}$. b > 16200 bewegt sich die erste Übergangsstelle bei konstantem d = 900 nach unten, analog für b < 16200 nach oben (vgl. Abbildung links). Für d > 900 verschiebt sich der zweite Übergangspunkt nach rechts und gleichzeitig wird der erste Übergangs nach oben verschoben, für d < 900 gelangt der zweite Übergangspunkt weiter nach unten und der zweite nach nach links (vgl. Abbildung rechts).





Aufgabe 5

a)	Vorteil	Nachteil
Kleeblatt (Leverkusener Kreuz)	• geringer Platzbedarf • einfache Bauweise, kostensparend • Umkehren des Kreuz möglich (zweimal abbiegen)	• hohe Staugefahr durch starkes Absenken der Geschwindigkeit (z. B. Leverkusener Kreuz)
Malteser (Köln-Ost)	• geringere Staugefahr, da Kreuz mit höherer Geschwindigkeit durchfahren werden kann.	• aufwendige Baukonstruktionen in der Mitte (vier Fahrbahnen übereinander), kostenintensiv • kein Wenden möglich
Turbine (oft in Großbritannien)	• geringere Staugefahr, da Kreuz mit höherer Geschwindigkeit durchfahren werden kann. • weniger aufwendig in der Baumweise als das Malteserkreuz	• größerer Platzbedarf als bei Kleeblattlösung • kein Wenden möglich
Windmühle (USA)	• höhere Geschwindigkeiten als bei Kleeblattkreuz möglich	• geringere Geschwindigkeiten als bei Malteser oder Turbine • kein Wenden möglich

Näheres erfährst Du unter www.wikipedia.org/wiki/Autobahnkreuz

b) Etwa in der Mitte der Trasse I liegt ein Rechts-Links-Wendepunkt. Daher wird Trasse I durch eine Funktion mindestens vierten Grades beschrieben (mindestens zwei Wendestellen bedeuten mindestens zwei Nullstellen der zweiten Ableitung, d. h. mindestens Grad zwei der zweiten und damit mindestens Grad vier bei der Funktion). Daher werden mindestens fünf Bedingungen zur Modellierung von Trasse I benötigt.

c) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Bedingungsgleichungen:
(1) A st sprungfrei: $f(-100) = 0 \Leftrightarrow (-100)^4a + (-100)^3b + (-100)^2c + (-100)d + e = 0$
(2) A ist knickfrei: $f'(-100) = 0 \Leftrightarrow 4(-100)^3a + 3(-100)^2b + 2(-100)c + d = 0$
(3) A ist krümmungssprungfrei: $f''(-100) = 0 \Leftrightarrow 12(-100)^2a + 6(-100)b + 2c\ = 0$
(4) B ist sprungfrei: $f(0) = -50 \Leftrightarrow e = -50$
(5) B ist knickfrei: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$
Mit dem GTR folgt für a, b, c: $a = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$; $b = 4 \cdot 10^{-4}$; $c = 0{,}03$. Mit d = 0 und e = -50 folgt:
$f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50\ (-50 \le x \le 0)$

d) $f(x) = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - 50$; $f'(x) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 12 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}06 \cdot x$
$f''(x) = 18 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 24 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}06$; $f'''(x) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot x + 24 \cdot 10^{-4}$
$f''(x) = 18 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 24 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}06 = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longrightarrow} x = -100 \vee x = -33\tfrac{1}{3}$
$f'''(-100) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot (-100) + 24 \cdot 10^{-4} = -12 \cdot 10^{-4} < 0$: -100 ist Links-Rechts-Wendestelle.
$f'''\left(-33\tfrac{1}{3}\right) = 36 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-33\tfrac{1}{3}\right) + 24 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4} > 0$: $-33\tfrac{1}{3}$ ist Links-Rechts-Wendestelle.

e) Da 0 eine Extremstelle von f ist, ist die Krümmung an der Stelle 0 nach dem Merksatz von Aufgabe 2 gleich $f''(0) = 0{,}06$. Dieser Wert entspricht aber nicht der Krümmung des Kreises mit dem Radius 50, der $\frac{1}{50} = 0{,}02$ beträgt. Daher hat der Übergang einen Krümmungssprung bei 0.

f) Die Funktionsschar $f_{r,t}$ mit $f_{r,t}(x) = \frac{3r}{t^4} \cdot x^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot x^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot x^2 - r$ besitzt die folgenden Ableitungen:
$f_{r,t}'(x) = \frac{12r}{t^4} \cdot x^3 + \frac{24r}{t^3} \cdot x^2 + \frac{12r}{t^2} \cdot x$ und $f_{r,t}''(x) = \frac{36r}{t^4} \cdot x^2 + \frac{48r}{t^3} \cdot x + \frac{12r}{t^2}$
Nun müssen die folgenden fünf Bedingungen überprüft werden:
$f_{r,t}(-t) = 0$; $f_{r,t}'(-t) = 0$; $f_{r,t}''(-t) = 0$; $f_{r,t}(0) = -r$; $f_{r,t}'(0) = 0$

$f_{r,t}(-t) = \frac{3r}{t^4} \cdot (-t)^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot (-t)^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot (-t)^2 - r = 3r - 8r + 6r - r = 0$

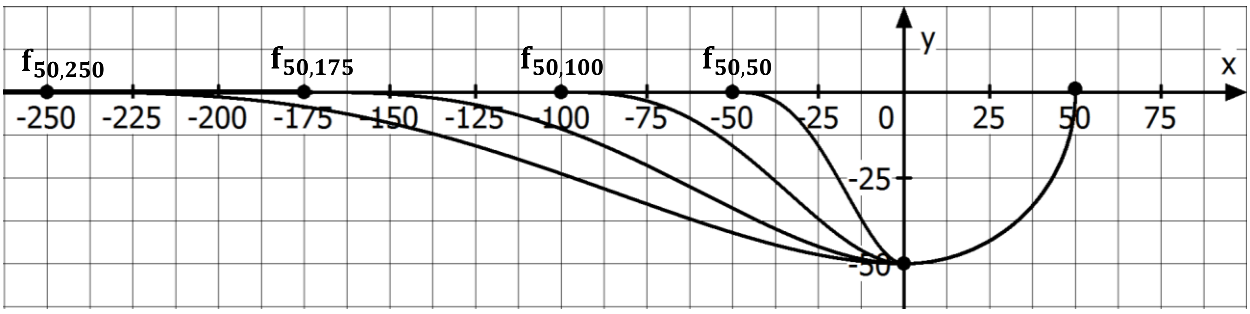
$f_{r,t}'(-t) = \frac{12r}{t^4} \cdot (-t)^3 + \frac{24r}{t^3} \cdot (-t)^2 + \frac{12r}{t^2} \cdot (-t) = -\frac{12r}{t} + \frac{24r}{t} - \frac{12r}{t} = 0$

$f_{r,t}''(-t) = \frac{36r}{t^4} \cdot (-t)^2 + \frac{48r}{t^3} \cdot (-t) + \frac{12r}{t^2} = \frac{36r}{t^2} - \frac{48r}{t^2} + \frac{12r}{t^2} = 0$

$f_{r,t}(0) = \frac{3r}{t^4} \cdot 0^4 + \frac{8r}{t^3} \cdot 0^3 + \frac{6r}{t^2} \cdot 0^2 - r = -r$

$f_{r,t}'(-t) = \frac{12r}{t^4} \cdot 0^3 + \frac{24r}{t^3} \cdot 0^2 + \frac{12r}{t^2} \cdot 0 = 0$

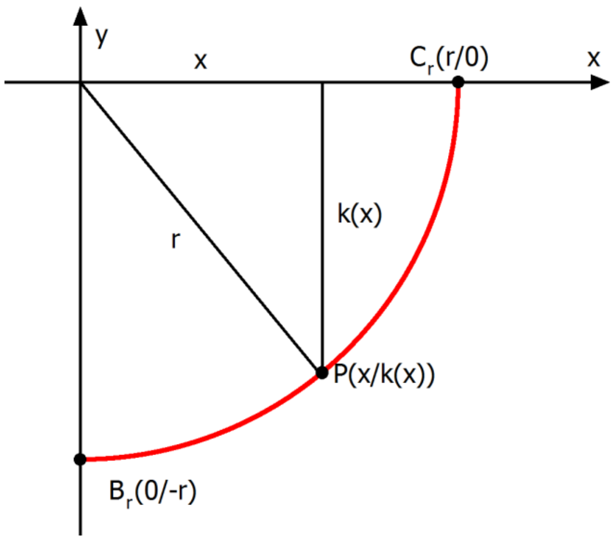
g)



Am besten geeignet ist der Graf zu $f_{50,175}$. Hier schmiegt sich ein Kreis mit dem Radius 50 in der Nähe von Null am besten an.

h) und i) Damit der Übergang B krümmungssprungfrei ist, muss nach dem Merksatz von Aufgabe 2 für die Extremstelle x = 0 gelten: $f_{r,t}''(0) = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{12r}{t^2} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow 12r^2 = t^2 \underset{r,t>0}{\Longleftrightarrow} t = \sqrt{12} \cdot r \approx 3{,}46 \cdot r$. Damit wird klar warum in Aufgabenteil g) $f_{50,175}$am besten geeignet zu sein scheint. Denn für einen Wert $t = \sqrt{12} \cdot 50 \approx 173$ ist bei einem Radius r = 50 die Stelle 0 krümmungssprungfrei.

j) Nach dem Satz des Pythagoras (siehe folgende) gilt: $k_r^2(x) + x^2 = r^2$. Umgeformt nach $k_r(x)$ ergibt sich für $0 \leq x \leq r$: $k_r(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Für den unteren Viertelkreis gilt daher für $0 \leq x \leq r$: $k_r(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.



k) Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungsgleichungen:

(1) A st sprungfrei: $f(-t) = 0 \Leftrightarrow (-t)^4a + (-t)^3b + (-t)^2c + (-t)d + e = 0$

(2) A ist knickfrei: $f'(-t) = 0 \Leftrightarrow 4(-t)^3a + 3(-t)^2b + 2(-t)c + d = 0$

(3) A ist krümmungssprungfrei: $f''(-t) = 0 \Leftrightarrow 12(-t)^2a + 6(-t)b + 2c = 0$

(4) B ist sprungfrei: $f(0) = -r \Leftrightarrow e = -r$

(5) B ist knickfrei: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Man erhält nun das LGS in für a, b und c Matrizenschreibweise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (-t)^4 & (-t)^3 & (-t)^2 & r \\ 4(-t)^3 & 3(-t)^2 & 2(-t) & 0 \\ 12(-t)^2 & 6(-t) & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -4t^3 & 3t^2 & -2t & 0 \\ 12t^2 & -6t & 2 & 0 \end{array}\right] \xLeftrightarrow[\mathrm{II}+t\cdot\mathrm{III}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -4t^3 & 3t^2 & -2t & 0 \\ 8t^3 & -3t^2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xLeftrightarrow[2\cdot\mathrm{I}+t\cdot\mathrm{II}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -2t^4 & t^3 & 0 & 2r \\ 8t^3 & -3t^2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xLeftrightarrow[3\cdot\mathrm{II}+t\cdot\mathrm{II}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} t^4 & -t^3 & t^2 & r \\ -2t^4 & t^3 & 0 & 2r \\ 2t^4 & 0 & 0 & 6r \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} t^2 & -t & 1 & \frac{r}{t^2} \\ -2t & 1 & 0 & \frac{2r}{t^3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3r}{t^4} \end{array}\right].$$

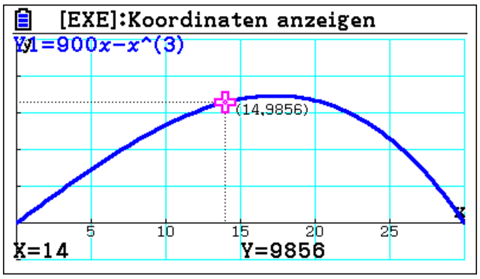
Es folgt für a, b, c: $a = \frac{3r}{t^4}$; $b = \frac{2r}{t^3} + 2t \cdot \frac{3r}{t^4} = \frac{8r}{t^3}$; $c = \frac{r}{t^2} + t\frac{8r}{t^3} - t^2\frac{3r}{t^4} = \frac{6r}{t^2}$. Mit d = 0 und e = -r erhält man die Funktionsschar $f_{r,t}$.

4 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

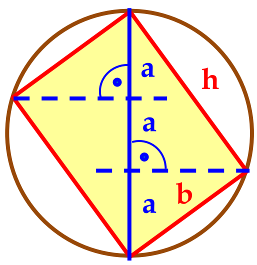
Aufgabe 1

a) Die Zielfunktion $T(b) = b \cdot (900 - b^2) = 900b - b^3$ erhält man für $0 \le b \le 30$, indem man die Nebenbedingung $b^2 + h^2 = 30^2$ (Satz des Pythagoras) nach h^2 auflöst und $h^2 = 900 - b^2$ in $T(b, h) = b \cdot h^2$ einsetzt. So hängt T nur noch von b ab. Gesucht ist nun das globale Maximum von T im Intervall [0; 30]. Dafür bestimmt man zunächst T´ und T´´: $T'(b) = 900 - 3b^2$; $T''(b) = -6b$; Setzt man T´ nun Null, folgt: $T'(b) = 900 - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 10\sqrt{3} \approx \pm 17{,}3$. Interessant ist nur den positive Wert, den man nun in T´´ einsetzt: $T''(10\sqrt{3}) = -60\sqrt{3} < 0$: $b = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ ist lokale Maximumstelle und wegen $T(0) = 0 = T(30)$ sogar global im Intervall [0; 30]. Die dazugehörige Höhe ist $h = \sqrt{30^2 - b^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \approx 24{,}5$.

b) Man betrachte die Zielfunktion auf dem Intervall [0; 14]. Da die Funktion T für $0 \le b \le 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ streng monoton wachsend ist, liefert der Randwert b = 14 (und $h = \sqrt{900 - 14^2} \approx 26{,}5$) die gesuchte Lösung.



c)

Zimmermannsregel	Faustregel
Teile den Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts des Baumstammes in 3 gleiche Teile. Errichte in den Teilungspunkten jeweils das Lot. Damit erhältst du den Balkenquerschnitt. 	Breite : Höhe = 5 : 7
Nach dem Kathetensatz gilt: $b^2 = a \cdot 3a = 3a^2$ bzw. $h^2 = 2a \cdot 3a = 6a^2$ $\Rightarrow \frac{b^2}{h^2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{b}{h} = \sqrt{0{,}5}$ Der Wert stimmt genau mit dem berechneten Wert überein (siehe rechts)	$\frac{b}{h} = \frac{10\sqrt{3}}{10\sqrt{6}} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$ $\frac{5}{7} \approx 0{,}714$ $\frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{0{,}5}} \approx 1{,}01$ Abweichung ca. 1 %

d) Man hat als Zielfunktion $T(b) = k \cdot b \cdot (D^2 - b^2) = k \cdot (D^2 b - b^3)$ und betrachte den Parameter $k > 0$ als beliebig aber fest. Es gilt: $T'(b) = k \cdot (D^2 - 3b^2)$ und $T''(b) = -6\,k \cdot b$. Man erkennt, dass die Rechnungen die gleichen sind wie in Aufgabenteil a). Man erhält daher als optimale Breite und Höhe: $b = \frac{\sqrt{3}}{3} D$ und $h = \sqrt{D^2 - b^2} = \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{3}} = \sqrt{\frac{2D^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, D = \frac{\sqrt{6}}{3} D$. Insbesondere gilt die Zimmermannsregel für einen beliebigen Baumdurchmesser D, da der Quotient aus b und h für jeden Durchmesser $\sqrt{0{,}5}$ ist.

Aufgabe 2

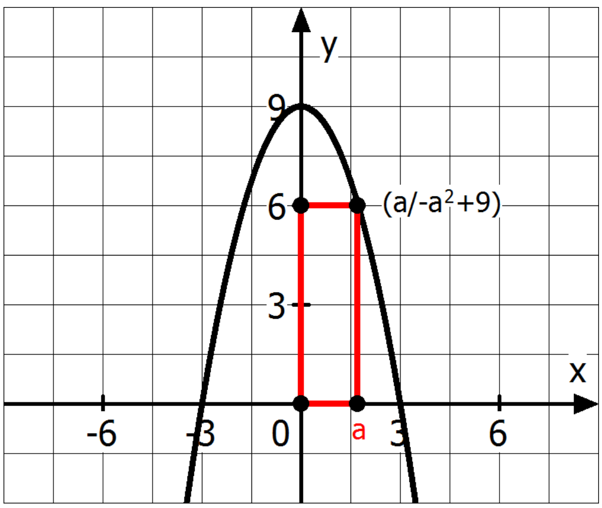
a)

Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a(-a^2 + 4) = -2a^3 + 8a$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 2$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -6a^2 + 8$; $A''(a) = -12a$
$A'(a) = -6a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$
Es gilt $A''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -8\sqrt{3} < 0 \wedge A(0) = A(2) = 0$: $a = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$ ist globale Maximumstelle auf dem Intervall [0; 2].
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
Höhe = $f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 4 = \frac{8}{3}$;
Maximaler Flächeninhalt = $\frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3} \approx 6{,}16$.

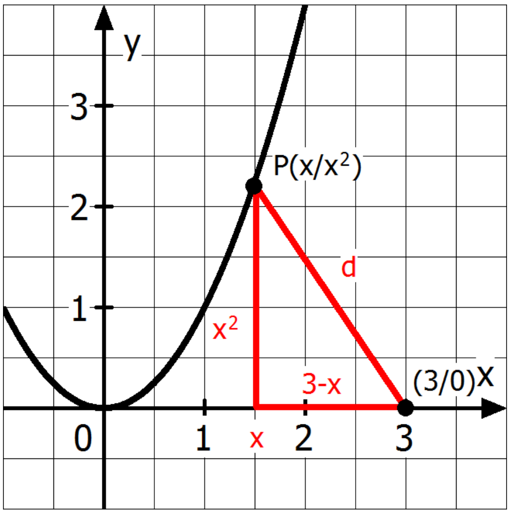
Zielfunktion Umfang: $U(a) = 4a + 2 \cdot (-a^2 + 4) = -2a^2 + 4a + 8$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 2$
Globales Minimum bestimmen: $U'(a) = -4a + 4$; $U''(a) = -4$
$U'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.
Es gilt: $U''(1) = -4 < 0 \wedge U(0) = U(2) = 8 \wedge U(1) = 10$: a = 1 ist globale Maximumstelle auf [0; 2].
Optimale Seitenlängen und maximalen Umfang bestimmen:
Breite = 2
Höhe = $f(1) = -1^2 + 4 = 3$;
Maximaler Umfang = 10.

b)

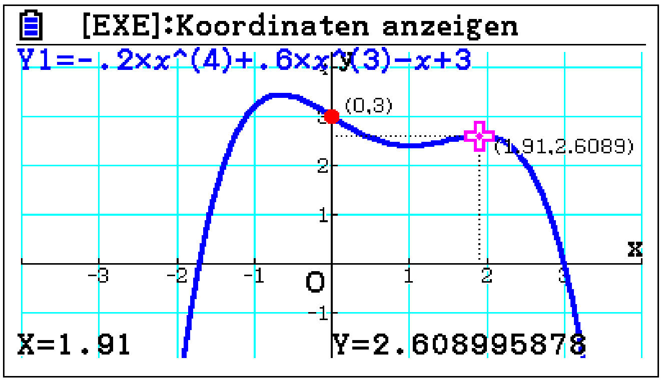
(1) Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = a \cdot f(a) = a(-a^2 + 9) = -a^3 + 9a$
Definitionsbereich: $0 \leq a \leq 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -3a^2 + 9$; $A''(a) = -6a$
$A'(a) = -3a^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.
Es gilt: $A''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0 \wedge A(0) = A(3) = 0$: $a = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ ist globale Maximumstelle auf [0; 3].
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = $\sqrt{3}$
Höhe = $f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + 9 = 6$;
Maximaler Flächeninhalt = $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$.



(2) Zielfunktion $D(x) = d^2(x) = (x^2)^2 + (3-x)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$
Definitionsbereich: $0 \le a \le 3$
Globales Maximum bestimmen: $D'(x) = 4x^3 + 2x - 6$; $D''(x) = 12x^2 + 2$
$D'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 0 \underset{\text{GTR}}{\iff} x = 1$.
Es gilt: $D''(1) = 14 > 0 \wedge D(0) = 9 \wedge D(3) = 81 \wedge D(1) = 5$: a = 1 ist globale Minimumstelle von D auf dem Intervall [0; 3].
Geringsten Abstand bestimmen:
$D(1) = 5 \Rightarrow d(1) = \sqrt{5}$ ist der geringste Abstand zur Parabel. der Lotfußpunkt lautet (1/1).



(3) Zielfunktion Flächeninhalt: $A(a) = (3-a) \cdot f(a) = (3-a) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}a^3\right) = -\frac{1}{5}a^4 + \frac{3}{5}a^3 - a + 3$
Definitionsbereich: $0 \le a \le 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = -\frac{4}{5}a^3 + \frac{9}{5}a^2 - 1$; $A''(a) = -\frac{12}{5}a^2 + \frac{18}{5}a$
$A'(a) = -\frac{4}{5}a^3 + \frac{9}{5}a^2 - 1 = 0 \underset{\text{GTR}}{\iff} a \approx 1{,}91 \vee a = 1 \vee a \approx -0{,}66$
Es gilt: $A''(1) = \frac{6}{5} > 0$: a =1 ist lokale Minimumstelle auf [0; 3].
$A''(1{,}91) \approx -1{,}88 < 0$: $a \approx 1{,}91$ ist lokale Maximumstelle auf [0; 3].
$A(0) = 3 \wedge A(3) = 0 \wedge A(1{,}91) \approx 2{,}61$
Damit ist der Randwert a = 0 auf dem Intervall [0; 3] globale Maximumstelle. Ein Blick auf die Zielfunktion verdeutlicht dies:

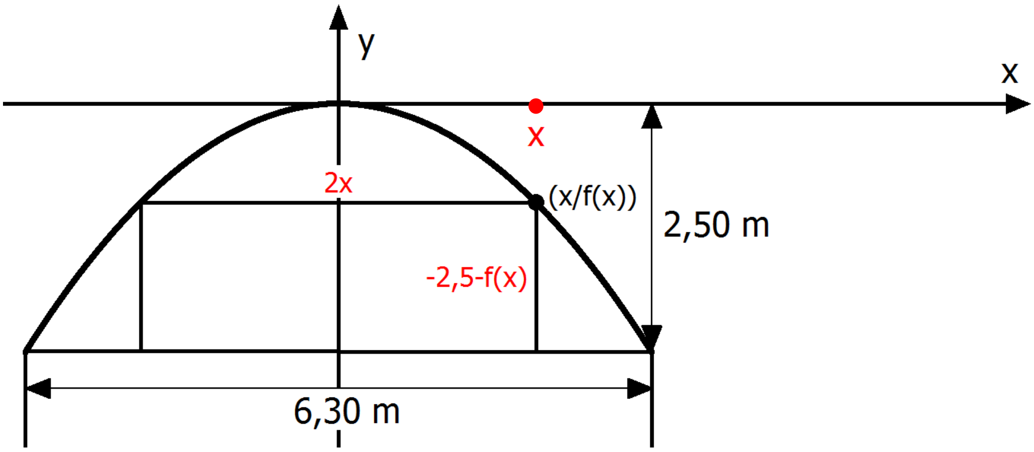


Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3
Höhe = f(0) = 1;
Maximaler Flächeninhalt = 3

Aufgabe 3

Schrottplatz Müller

Man legt das Koordinatensystem wie in der folgenden Abbildung beschrieben so, dass der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel im Ursprung liegt.

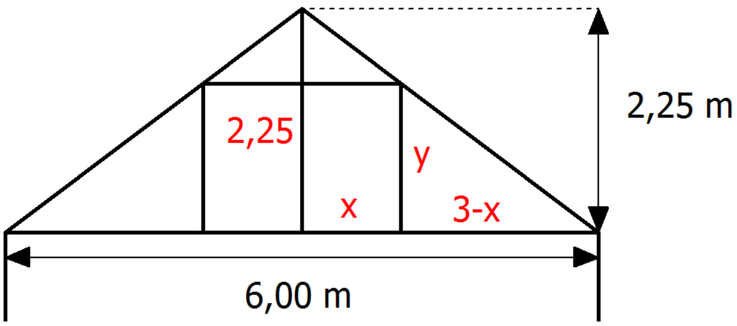


Zielfunktion Flächeninhalt:
$A(x,a) = -(-2{,}5 - f_a(x)) \cdot 2x = (2{,}5 + f_a(x)) \cdot 2x$ mit $f_a(x) = ax^2$ $(a < 0)$
Nebenbedingung: (3,15/-2,5) liegt auf dem Parabelbogen:$-2{,}5 = a \cdot 3{,}15^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1000}{3969} \approx 0{,}2520$
Nebenbedingung einsetzen: $A(x) = \left(2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2\right) \cdot 2x = 5x - \frac{2000}{3969}x^3$
Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 3{,}15$
Globales Maximum bestimmen: $A'(x) = 5 - \frac{6000}{3969}x^2$; $A''(x) = -\frac{12000}{3969}x$
$A'(x) = 5 - \frac{6000}{3969}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1323}{400}} = \frac{21}{20}\sqrt{3} \approx 1{,}82$
$A''(1{,}82) < 0 \;\wedge A(0) = A(3{,}15) = 0 \wedge A(1{,}82) \approx 6{,}1$: $x \approx 1{,}8$ ist globale Maximumstelle auf $[0; 3{,}15]$.
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3,64 Höhe $= 2{,}5 + f(1{,}82) \approx 1{,}67$ Maximaler Flächeninhalt $= A(1{,}82) \approx 6{,}06$

[Alternative „elegantere" Lösung: Wählt man das Koordinatensystem so, dass die untere Seite des Schildes auf der x-Achse liegt erhält man mit der Parabel mit $f(x) = 2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2$ dieselbe Zielfunktion wie oben: $A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot \left(2{,}5 - \frac{1000}{3969}x^2\right) = 5x - \frac{2000}{3969}x^3$]

Schrottplatz Schmitz

Hier kommt man auch ohne Koordinatengeometrie aus. Man betrachte folgende Strahlensatzfigur:



Zielfunktion Flächeninhalt: $A(x,y) = 2x \cdot y$

Nebenbedingung: Der Strahlensatz liefert: $\frac{y}{2{,}25} = \frac{3-x}{3} \Rightarrow y = 0{,}75 \cdot (3-x)$
Nebenbedingung einsetzen: $A(x) = 2x \cdot 0{,}75 \cdot (3-x) = 4{,}5x - 1{,}5x^2$
Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 3$
Globales Maximum bestimmen: $A'(x) = 4{,}5 - 3x$; $A''(x) = -3$
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$
$A''(1{,}5) = -3 < 0 \ \wedge A(0) = A(3) = 0 \wedge A(1{,}5) = 3{,}375$: $x = 1{,}5$ ist globale Maximumstelle auf $[0; 3]$.
Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:
Breite = 3 Höhe = 1,125 Maximaler Flächeninhalt = 3,375

Aufgabe 4

a)

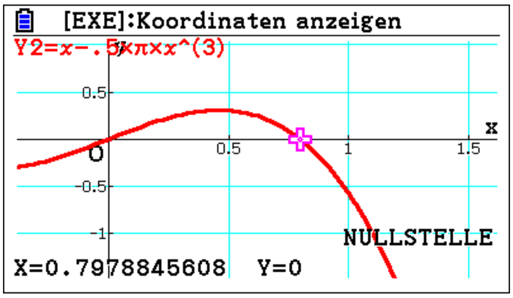
Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 750 \Leftrightarrow h = \frac{750}{\pi r^2}$
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{750}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1500}{r} = 2\pi r^2 + 1500r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 1500r^{-2}$; $O''(r) = 4\pi + 3000r^{-3}$
$O'(r) = 4\pi r - 1500r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 1500 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 4{,}92$; $O''(4{,}92) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1500r^{-1} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1500r^{-1} \xrightarrow[r\to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2 + \frac{1500}{\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}} \approx 457$ [cm²]
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser = $2\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 9{,}84$ [cm] Höhe = $\frac{750}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2} \approx 9{,}85$ [cm] Minimale Oberfläche = 457 cm²

b)

(1) Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi r^2}$ (0,33 l = 330 cm³)
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r} = 2\pi r^2 + 660r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 660r^{-2}$; $O''(r) = 4\pi + 1320r^{-3}$
$O'(r) = 4\pi r - 660r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 660 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}74$; $O''(3{,}74) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 660r^{-1} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 660r^{-1} \xrightarrow[r\to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right)^2 + \frac{660}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} \approx 264$ [cm²]
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser = $2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 7{,}48$ [cm] Höhe = $\frac{330}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right)^2} \approx 7{,}48$ [cm] Minimale Oberfläche = 264 cm²

(2) Zielfunktion: $V(r,h) = \pi r^2 h$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $O = \pi r^2 + 2\pi rh = 2 \Leftrightarrow h = \frac{2-\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r$

Nebenbedingung einsetzen: $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r\right) = r - \frac{1}{2}\pi r^3$



Definitionsbereich: Die Funktion macht nur Sinn für positives Volumen. Daher muss gelten wegen r > 0: $\pi r^2\left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi r} - \frac{1}{2}r > 0 \underset{\cdot r>0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}r^2 > 0 \Leftrightarrow r^2 < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow r < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}80.$

Also gilt $0 < r < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}8$

Globales Maximum bestimmen: $V'(r) = 1 - 1{,}5\pi r^2;\ V''(r) = -3\pi r$

$V'(r) = 1 - 1{,}5\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46;\ V''\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right) < 0$

$\wedge\ V(r) = r - \frac{1}{2}\pi r^3 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\wedge\ V\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 0$

$V\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} - \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right)^3 \approx 0{,}307\ [m^3]$

Daher nimmt V bei $r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ sein globales Maximum an.

Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:

Radius $= \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46\ [m]$ Höhe $= \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2}{3\pi}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0{,}46\ [m]$ Maximales Volumen = 0,307 m³

(3) Zielfunktion Volumen: $V(r,h) = \pi r^2 h$

Nebenbedingung: Der Strahlensatz liefert: $\frac{h}{10} = \frac{3-r}{3} \Rightarrow h = \frac{10}{3}\cdot(3-r)$

Nebenbedingung einsetzen:

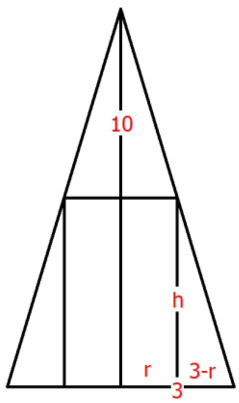
$V(r) = \frac{10}{3}\pi r^2 \cdot (3-r) = 10\pi r^2 - \frac{10}{3}\pi r^3$

Definitionsbereich: $0 \le r \le 3$

Globales Maximum bestimmen: $V'(r) = 20\pi r - 10\pi r^2;\ V''(r) = 20\pi - 20\pi r$

$V'(r) = 20\pi r - 10\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow 2r - r^2 = 0 \Leftrightarrow r(2-r) = 0 \Leftrightarrow r = 2$ (da $r > 0$)

$V''(2) = -20\pi < 0\ \wedge V(r) = \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \wedge\ V(3) = 0 \wedge V(2) = \frac{40}{3}$: x = 2 ist globale Maximumstelle auf [0; 3].



Optimale Seitenlängen und maximalen Flächeninhalt bestimmen:

Breite = 4 cm Höhe = $\frac{10}{3}$ cm Maximaler Flächeninhalt = $\frac{40}{3}$ cm2

Kontrollergebnisse für die 1er-Aufgabe: a) Radius r ≈ 2,67 cm, Höhe h ≈ 3,33 cm b) Radius r ≈ 3,03 cm, Höhe h ≈ 2,42 cm.

Aufgabe 5

a)

Beispiel für eine mögliche Begründung: Eine kleine Erhöhung wird man akzeptieren, wenn die Qualität stimmt. Weniger Kunden wird es erst bei einer kräftigeren Erhöhung geben. Dann ist aber auch zu rechnen, dass gleich „überproportional“ viele Kunden abspringen.

b)

Zielfunktion bestimmen: Die Kosten K, die Einnahmen E und der dazugehörige Gewinn G = E − K hängen von der Anzahl n der Preiserhöhungen und dem damit verbundenen Käuferschwund KS ab. Für K, E und G (in €) gilt $K = 90 + (250 - KS) \cdot 1{,}2$ und $E = (250 - KS) \cdot (1{,}8 + 0{,}1n)$. Die Zielfunktion lautet in Abhängigkeit von KS und n: $G(KS; n) = (250 - KS) \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - [90 + (250 - KS) \cdot 1{,}2]$.
Nebenbedingung: $KS = n^2$.
Definitionsbereich: $0 \leq n < 15$ (falls n ganzzahlig ist, sonst 15,81); $0 \leq KS < 250$.
KS in die Zielfunktion einsetzen: $G(n) = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - [90 + \mathbf{(250 - n^2)} \cdot 1{,}2] = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n) - 90 - \mathbf{(250 - n^2)} \cdot 1{,}2 = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (1{,}8 + 0{,}1n - 1{,}2) - 90 = \mathbf{(250 - n^2)} \cdot (0{,}6 + 0{,}1n) - 90 = -0{,}1n^3 - 0{,}6n^2 + 25n + 150 - 90 = -0{,}1n^3 - 0{,}6n^2 + 25n + 60$
Nun **maximiert** man **die Gewinnfunktion** in Abhängigkeit von n:
$G'(n) = -0{,}3n^2 - 1{,}2n + 25$. Dann gilt: $G'(n) = 0 \Rightarrow n \approx 7{,}3$ (die zweite Lösung ist -11,3 und ist nicht Teil des Definitionsbereichs). G´ wechselt bei 7,3 das VZ von + nach – (z. B. $G'(0) = 25$ und $G'(10) = -17$): 7,3 ist lokale Maximumstelle. Das Maximum beträgt $G(7{,}3) = 171{,}62$.
Ränder untersuchen: Wegen $G(0) = 60$ und $G(15) = -37{,}5$ ist 7,3 globale Maximumstelle.
Ergebnis formulieren/Interpretation im Sachzusammenhang: Geht man von einer Preiserhöhung aus, die ein ganzzahliges Vielfaches von 10 ct beträgt, dann ergibt sich wegen $G(7) = 171{,}3$ sowie $G(8) = 170{,}7$ ein maximaler Gewinn (170,30 €) bei einer Erhöhung um 70 ct, d. h. einem Verkaufspreis von 2,50 €. Würde man eine beliebige ganzzahlige Preiserhöhung zulassen, betrüge der Gewinn bei einer Erhöhung um 73 ct 171,62 €.

Aufgabe 6

a)

Für den Verkaufspreis x (in €) und den Gesamtgewinn G gilt (N ist die Anzahl der 0,25 Euro-Preissenkungsschritte):

Verkaufspreis	Anzahl N	verkaufte Menge	Einnahmen	Kosten	Gewinn
10,00 €	0	10 000 kg	100 000 €	55 000 €	45 000 €
9,50 €	2	14 000 kg	133 000 €	77 000 €	56 000 €
6,00 €	16	42 000 k g	252 000 €	231 000 €	21 000 €

b)

Lösung 1 (Gewinnfunktion in Abhängigkeit von N):
$E(N) = (10000 + 2000N) \cdot (10 - 0{,}25N)$ und $K(N) = (10000 + 2000N) \cdot 5{,}5$. Der Verkaufspreis ist darstellbar durch $x = 10 - 0{,}25\,N$.
Zielfunktion: $G(N) = E(N) - K(N) = \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot (10 - 0{,}25N) - \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot 5{,}5 = \mathbf{(10000 + 2000N)} \cdot (10 - 0{,}25N - 5{,}5) = (10000 + 2000\,N) \cdot (4{,}5 - 0{,}25N) = 45000 + 6500\,N - 500\,N^2$.
Definitionsbereich von G: $0 \leq N \leq 40$.
Maximieren von G in Abhängigkeit von N: Der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, das globale Maximum tritt also im Scheitelpunkt auf. $G'(N) = -1000\,N + 6500 \Rightarrow G'(N) = 0 \Leftrightarrow N = 6{,}5 \Rightarrow x = 8{,}375$. Für $x = 8{,}38$ gilt $N = 6{,}52$ bzw. für $x = 8{,}37$ gilt $N = 6{,}52$ $(N = 40 - 4x)$.

Antwort im Sachzusammenhang: Da ein Verkaufspreis mit 0,5 ct im Einzelhandel nicht sinnvoll ist und G (6,52) = G (6,48) gilt (warum?), kann die Kaffeerösterei den Preis auf 8,37 € = 10 € – 0,25 · 6,48 € oder 8,38 € = 10 € – 0,25 · 6,52 € pro Kilogramm festlegen. Der Gewinn beträgt dabei in beiden Fällen 66 124,80 €.

Alternativlösung (Gewinnfunktion in Abhängigkeit vom Verkaufspreis x):
x ist der Verkaufspreis und N die Anzahl der 0,25 €-Ermäßigungen. E(x; N) = (10000 + 2000N) · x und K(x; N) = (10000 + 2000N) · 5,5.
Zielfunktion in Abhängigkeit von x und N: G(x; N) = E(x; N) – K(x; N) = **(10000 + 2000N)** · x – **(10 000 + 2000N)** · 5,5 = **(10 000 + 2000N)** · (x – 5,5)
Nebenbedingung: x = 10 – 0,25 N ⇔ N = 40 – 40x
Definitionsbereich: $D_G = \{ x \mid 5{,}5 \leq x \leq 10 \}$
Einsetzen in G(x; N): G(x; N) = (10 000 + 2000 · (40 – 4x)) · (x – 5,5) = (10 000 + 80 000 – 8000x) · (x – 5,5) = (-8000x + 90 000) · (x – 5,5) =-8000 x^2 + 134 000 x − 495 000
Maximieren von G in Abhängigkeit vom Kaufpreis x: Der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, das Maximum tritt also im Scheitelpunkt auf. G'(x) = −16 000 x + 134 000 ⇒ G'(x) = 0 ⇔ x = 8,375
Antwort im Sachzusammenhang: Da ein Verkaufspreis mit 0,5 ct im Einzelhandel nicht sinnvoll ist und G(8,37) = G(8,38) gilt, kann die Kaffeerösterei den Preis auf 8,37 € oder 8,38 € pro Kilogramm festlegen. Der Gewinn beträgt dabei jeweils 66 124,80 €.

c)

Kritikpunkte: Der Zusammenhang von Preisreduzierung und Absatz ist unrealistisch, die Selbstkosten pro Tag sind nicht konstant. Ein realistischerer Ansatz konnte z. B. durch einen quadratischen oder kubischen Zusammenhang von Preisreduzierung und Absatzmenge erfolgen.

Aufgabe 7

a)

Für die durchschnittlichen Herstellungskosten H gilt: $H(x) = \frac{K(x)}{x} = 2x^2 - 16x + 48 + 100x^{-1}$.
Der Definitionsbereich von H ist 0 < x ≤ 9 (warum?).
Für die Ableitung H´ gilt $H'(x) = 4x - 16 - 100x^{-2}$. Setzt man H´ Null ergibt sich $4x - 16 - 100x^{-2} = 0$. Multipliziert man beide Seiten mit $x^2 > 0$ erhält man $4x^3 - 16x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 25 = 0$. Mithilfe des GTR erhält man die einzige Lösungen 5 (z. B. über MENU A). Wegen H´(5) = 0, H´(4) = -25 < 0 und H´(6) = 47 > 0 (VZW von – nach +) besitzt H an der Stelle 5 ein lokales Minimum, das sogar global ist, da H für kleine Werte von x sehr groß wird und auch H(9) ≈ 77,11 größer als H(5) = 38 ist.
Antwort: Bei einer Produktionsmenge von 5000 Einheiten sind die durchschnittlichen Produktionskosten minimal.

b)

Zielfunktion: G(x) = E(x) − K(x) = −18 x^3 + 16 x^2 + 96 x – 100.
Definitionsbereich: 0 ≤ x ≤ 9.
Globales Maximum bestimmen: G'(x) = − 54 x^2 + 32 x + 96; G´(x) = 0 ⇒ $x_1 \approx 1{,}662$; $x_2 \approx -1{,}07 < 0$ (entfällt), G´(1) = 74 > 0, G´(2) = -56 < 0 (VZW von G´ von + nach –): Also liegt bei x_1 ein lokales Maximum vor. Für die Randwerte gilt G(0) = −100; G(9) = −11 062 (Maximum global).
Antwort: Bei einer Produktionsmenge von ca. 1662 Einheiten ist der Gewinn maximal.

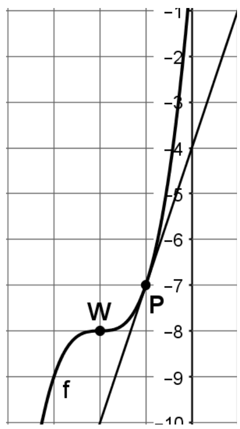
Kontrollaufgaben

Aufgabe 1

a)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x = x \cdot (x^2 + 6x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, denn die Diskriminante von der quadratischen Gleichung in Normalform lautet $D = 3^2 - 12 = -3 < 0$.

b)



$f'(-1) = 3$ entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle -1 (im Punkt P).

c)

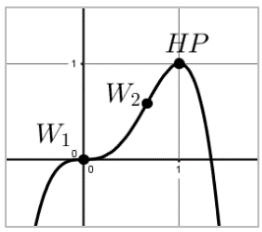
$t(x) = f'(-1) \cdot x - 4 = 3x - 4$ (von P erreicht man die Schnittstelle mit der y-Achse, indem man von P eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach oben geht.)

d)

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12, f''(x) = 6x + 12, f''(x) = 6$.
Es gilt: $f'(-2) = f''(-2) = 0, f'''(-2) = 6 > 0$ (ReLiPo) und $f(-2) = -8$.
Daher ist W(-2/-8) ein Sattelpunkt

Aufgabe 2

a)



Die Aussage ist falsch, da es Graphen ganzrationaler Funktionen gibt, die nach einem Sattelpunkt (W_1) zunächst einen Wendepunkt (W_2) haben, bevor ein Extrempunkt (HP) vorliegt. Z . B. für den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -3x^4 + 4x^3$ (siehe rechts)

b)

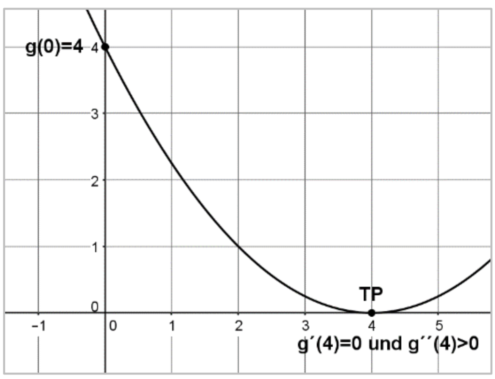
Die Aussage ist richtig, da die Krümmung an den beiden benachbarten Extrempunkten unterschiedlich sein muss und daher dazwischen ein Krümmungswechsel erfolgen muss.

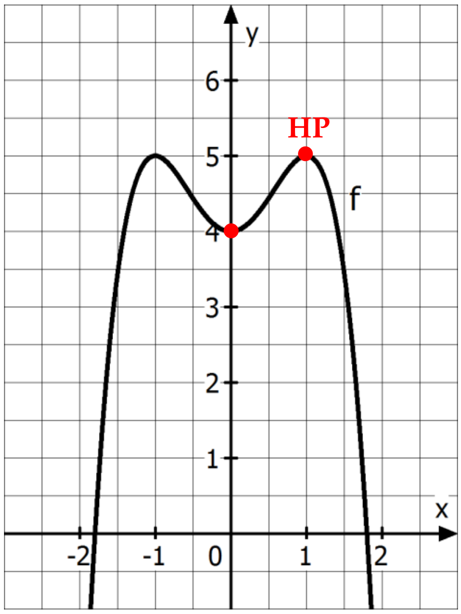
c)

Die Aussage ist richtig, da der Graph der Ableitungsfunktion eine Parabel zweiter Ordnung ist, die mit dem Scheitelpunkt einen Extrempunkt besitzt.

Aufgabe 3

a)





b)

Zu (1)
Die Funktion f ist gerade $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
(I) f(0) = 4
(II) f(1) = 5
(III) f´(1) = 0

Zu (2)
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
(I) f(0) = 4 $\Rightarrow c = 0$
(II) f(1) = 5 $\Rightarrow a + b + c = 5 \underset{c=0}{\Leftrightarrow} a + b = 5$
(III) f´(1) = 0 $\Rightarrow 4a + 2b = 0$
(III) + (-2)·(II): 2a = -10 $\Leftrightarrow a = -5 \xRightarrow[\text{a in (2)}]{} b = 10$
Also: $f(x) = -5x^4 + 10x^2$

Aufgabe 4

a)

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (Funktion ist wegen der Achsensymmetrie des Graphen gerade)
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$, $f''(x) = 12ax^2 + 2b$,
f(1) = 3: a + b + c = 3, (II) f´´(1) = 0: 12a + 2b = 0 (III) f´(1)= -2: 4a + 2b = -2 $\Leftrightarrow$ 2a + b = -1.
Man erhält das LGS:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 0 & 0. \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right.$$

Mit dem GTR erhält man die Lösung: a = 0,25, b = -1,5 und c = 4,25.

b)

$f(x) = ax^3 + bx$ (Funktion ist wegen der Punktsymmetrie des Graphen ungerade)
$f'(x) = 3ax^2 + b$,
(I) f(1) = 2: a + b = 2, (II) f´(1) = 0: 3a + b = 0.
(II) – (I) ergibt 2a = -2 bzw. a = -1 und damit b = 3.

c)

Ansatz $f(x) = x^2 + ax + b$.
Bedingung (1) f(3) = 0 $\Leftrightarrow$ 9 + 3a + b = 0 $\Leftrightarrow$ b = -9 – 3a. Daher folgt $f_a(x) = x^2 + ax - 9 - 3a$.
$f_a(x) = x^2 + ax - 9 - 3a = 0$. Die Diskriminante lautet: $D = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 9 + 3a = \frac{a^2}{4} + 3a + 9$. Die Diskriminante ist Null genau dann, wenn $\frac{a^2}{4} + 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 12a + 36 = 0 \Leftrightarrow (a+6)^2 = 0$.
Also für a = -6 ist die Diskriminante Null. Der Graph zu f_{-6} hat daher genau eine Nullstelle. Für alle anderen Parameter von a hat die Funktion genau zwei Nullstellen $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{a}{2} \pm \lceil a + 6 \rceil$

Aufgabe 4

a)

$g(x) = g_{AC}(x) = 5x$ und $h(x) = g_{BD}(x) = -2x + 12$

b)

Ein sprungfreier Übergang bedeutet, dass eine Straße ohne Lücke in die andere Straße übergeht. Ein knickfreier Übergang bedeutet, dass die beiden Straßen im Übergangspunkt die gleiche Steigung haben.

c)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Bedingungen aufstellen:
(I) f(0) = g(0) = 0, (II) f´(0) = g´(0) = 5; (III) f(4) = h(4) = 4, (IV) f´(4) = h´(4) = -2
Aus (I) folgt d = 0 und aus (II) unmittelbar c = 5. (III) und (IV) ergeben folgendes LGS:
(III) 64a + 16b + 4c + d = 4 und (IV) 48a + 8b + c = -2. Setzt man c und d ein, ergibt sich:
(III) 64a + 16b = -16 und (IV) 48a + 8b = -7.
Mit dem GTR erhält man: a = 0,0625 und b = -1,25
Also: $f(x) = 0{,}0625x^3 - 1{,}25x^2 + 5x$ und $f'(x) = 0{,}1875x^2 - 2{,}5x + 5$

d)

Es müsste eine Parabel mit einer Funktionsgleichung der Form $p(x) = ax^2 + 5x$ sein, da der Punkt A als Koordinatenursprung ein knick- und sprungfreier Übergang ist. Mit f(4) = 4 ergibt sich die Gleichung 16a + 20 = 4 oder a = -1. Damit gilt für die Funktionsgleichungen der Funktionen von p und p´ $p(x) = -x^2 + 5x$ und $p'(x) = -2x + 5$. Wegen $p'(4) = -2 \cdot 4 + 5 = -3$ ist der Übergang nicht knickfrei. Eine Parabel hat in der obigen Situation mindestens einen Übergang der nicht knickfrei ist.

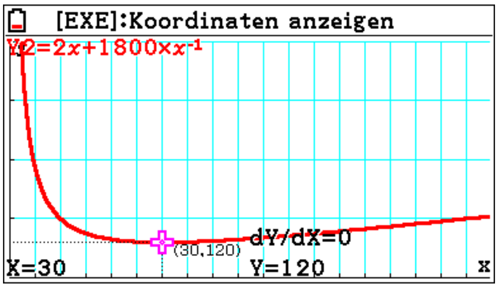
e)

$f''(x) = 0{,}375x - 2{,}5$
$f''(0) = -2{,}5 \neq g''(0) = 0$ und f´´(4) = -1 $\neq h''(0) = 0$
Ein Graph mit krümmungssprungfreien Übergängen A und B kann durch eine GRF vom Grad fünf modelliert werden (es kommen zwei Bedingungen dazu). Wenn es einen Graphen einer GRF vierten Grades gäbe, für den an den knick- und sprungfreien Übergangsstellen die zweite Ableitung den Wert Null annimmt, könnte das Problem auch durch eine Funktion vierten Grades beschrieben werden (denn dann würde f´´(0) = g´´(0) = 0 und f´´(4) = h´´(4) = 0 gelten).

Aufgabe 6

a)

Zielfunktion: $U(x; y) = 2x + 2y$;
Definitionsbereich: x und y sind positiv.
Nebenbedingung: $900 = x \cdot y$. Formt man diese Bedingung nach y um, erhält man $y = \frac{900}{x}$.
Einsetzen der NB in Zielfunktion: Setzt man y in die Zielfunktion ein, ergibt sich:
$U(x) = 2x + \frac{1800}{x} = 2x + 1800x^{-1}$.
Globales Minimum bestimmen:
$U'(x) = 2 - 1800x^{-2} = 0 \underset{\cdot x^2}{\Rightarrow} 2x^2 - 1800 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 30 \Rightarrow y = \frac{900}{30} = 30$.
Wegen $U'(29) \approx -0{,}14 < 0$ und $U'(31) = 0{,}13 > 0$ sowie $U(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ und $U(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ nimmt U für x = y = 30 ein globales Minimum an.
Antwort: Für x = y =30 cm beträgt der minimale Umfang 120 cm
[Lösung und Argumentation mit GTR möglich, allerdings müssen alle Ansätze und Ableitungen angegeben werden.]



b)

Zielfunktion: $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ mit dem Radius r und der Höhe h
Nebenbedingung: $V = \pi r^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$
Nebenbedingung einsetzen: $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r} = 2\pi r^2 + 1000r^{-1}$
Definitionsbereich: r, h > 0
Globales Minimum bestimmen: $O'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2};\ O''(r) = 4\pi + 2000r^{-3} > 0$
$O'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2} = 0 \underset{\cdot r^2}{\Leftrightarrow} 4\pi r^3 - 1000 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4{,}30;\ O''(4{,}30) > 0$
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1000r^{-1} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Null, zweiter gegen Unendlich)
$\wedge\ O(r) = 2\pi r^2 + 1000r^{-1} \xrightarrow[r\to +\infty]{} +\infty$ (erster Term strebt gegen Unendlich, zweiter gegen Null)
$O\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right)^2 + \frac{1000}{\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}} \approx 348{,}73\ [\mathrm{cm}^2]$
Daher nimmt O bei $r = \sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}$ sein globales Minimum an.
Optimale Maße der Dose und minimale Oberflächeninhalt bestimmen:
Durchmesser = $2\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}} \approx 8{,}60$ [cm] Höhe = $\frac{750}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{375}{\pi}}\right)^2} \approx 8{,}60$ [cm] Minimale Oberfläche = 349 cm²

c)

Zielfunktion: $V(x;y) = 2x^2 \cdot y$;
Definitionsbereich: $0 \le x, y \le 2$
Nebenbedingung: $2 = 6x + 4y$. Formt man diese Bedingung nach y um, erhält man $y = 0{,}5 - 1{,}5x$.
Einsetzen der NB in die Zielfunktion: $V(x) = 2x^2 \cdot (0{,}5 - 1{,}5x) = x^2 - 3x^3$
Bestimmung des globalen Maximums:
$V'(x) = 2x - 9x^2 = x \cdot (2 - 9x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (sinnlos) oder $x = \frac{2}{9}$. Mit $V''(x) = 2 - 18x$ ergibt sich $V''\left(\frac{2}{9}\right) = 2 - 18 \cdot \frac{2}{9} = -2 < 0$. Ferner gilt $V(0) = 0$ und $V(2) = -20$. Daher nimmt das Volumen sein globales Maximum für $x = \frac{2}{9}$ an.
Antwort: Die Länge beträgt ca. 22 cm die Breite (2x) beträgt ca. 44 cm und die Höhe (y) etwa 17 cm.

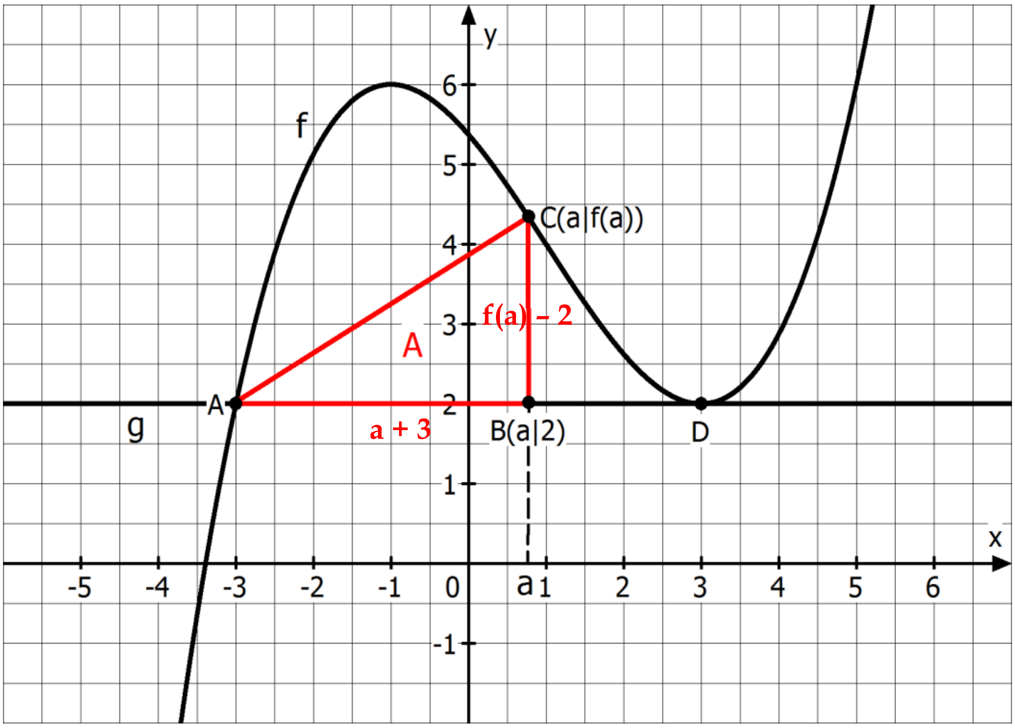
d)

Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 43)$ schneidet die Gerade g mit g(x) = 2 in den Punkten A(-3/2) und D(3/2) (vgl. Abbildung). Für -3 ≤ a ≤ 3 bilden die Punkte A, B(a/2) und C(a/f(a)) ein Dreieck. **Bestimme** a, so dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.

Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2}(a+3) \cdot [f(a) - 2] = \frac{1}{2}(a+3) \cdot \left[\frac{1}{8}(a^3 - 3a^2 - 9a + 43) - 2\right] = \frac{1}{16}(a+3) \cdot (a^3 - 3a^2 - 9a + 27) = \frac{1}{16}(a^4 - 18a^2 + 81)$
Definitionsbereich: -3 ≤ a ≤ 3
Globales Maximum bestimmen: $A'(a) = \frac{1}{16}(4a^3 - 36a);\ A''(a) = \frac{1}{16}(12a^2 - 36)$

$A'(a) = \frac{1}{16}(4a^3 - 36a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a(a^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm 3; A''(0) = -\frac{9}{4} < 0; A''(3) = \frac{72}{16} = \frac{9}{2} < 0$; $A(-3) = A(3) = 0; A(0) = \frac{81}{16} = 5{,}0625 \Rightarrow 0$ ist auf $[-3; 3]$ eine globale Maximumstelle.

Antwort: Für a = 0 wird der Flächeninhalt des Dreiecks mit einer Länge der Grundseite von 3 cm und der Höhe von f(0) – 2 = $\frac{27}{8}$ = 3,375 cm maximal und beträgt $\frac{81}{16}$ = 5,0625 cm².

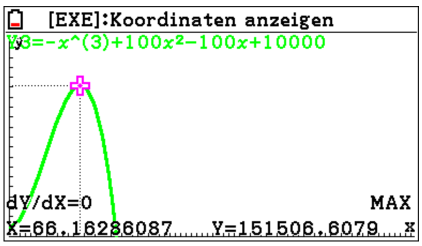


Aufgabe 7

a)

Seien x der Preisreduzierung in Euro, K(x) die monatlichen Kosten, E(x) die monatlichen Einnahmen und $G(x) = E(x) - K(x)$ der Gewinn. Dann gilt:
$K(x) = (100 + x^2) \cdot 100 = 10000 + 100x^2$
$E(x) = (100 + x^2) \cdot (200 - x) = 20000 + 200x^2 - 100x - x^3$.
Zielfunktion:
$G(x) = 20000 + 200x^2 - 100x - x^3 - 10000 - 100x^2 = -x^3 + 100x^2 - 100x + 10000$
Definitionsbereich: x > 0
Globales Maximum bestimmen: $G'(x) = -3x^2 + 200x - 100; G''(x) = -6x + 200$
$G'(x) = -3x^2 + 200x - 100 = 0 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 66{,}16 \vee x \approx 0{,}51;$
$G''(66{,}16) \approx -197 < 0; G''(0{,}51) \approx 197 > 0; G(0) = 10000; G(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty; G(66{,}16) \approx 151507$
$\Rightarrow$ G wird für 66,16 global maximal.

Antwort: Für eine Preisreduzierung von 66,16 € pro Stück wird der Gewinn mit 151507 am größten. Die dazugehörige Verkaufszahl beträgt etwa $100 + 66{,}16^2 \approx 4477$ Stück pro Monat. [Alternativ kann auch ein grafischer Nachweis erfolgen. Allerdings müssen dabei alle Ableitungen und Ansätze gemacht werden.]



b)

Sei N die Anzahl der monatlich verkauften Flaschen und x die Preisreduzierung. Dann gilt für N: $N = 100 + x^2$. Formt man diese Gleichung nach x um, erhält man $x = \sqrt{N - 100}$. Damit gilt für den Gewinn: $G(N) = E(N) - K(N) = N \cdot (200 - x) - N \cdot 100 = N \cdot \left(100 - \sqrt{N - 100}\right)$.