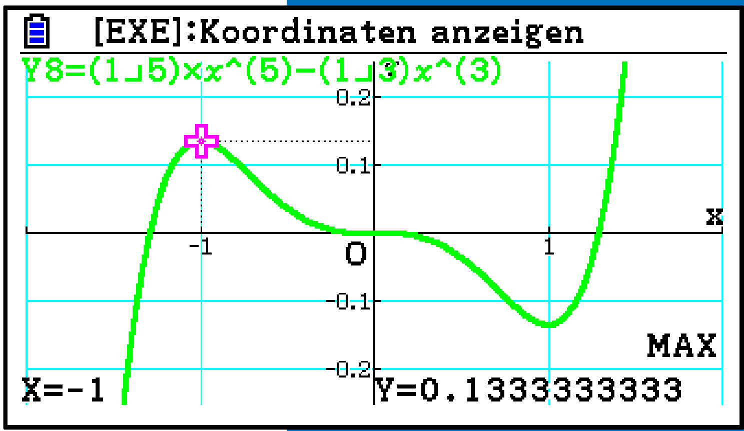
4. Unterrichtsvorhaben
in der E-Phase

Ganzrationale Funktionen untersuchen



Jörn Meyer
j.meyer@fals-solingen.de
www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

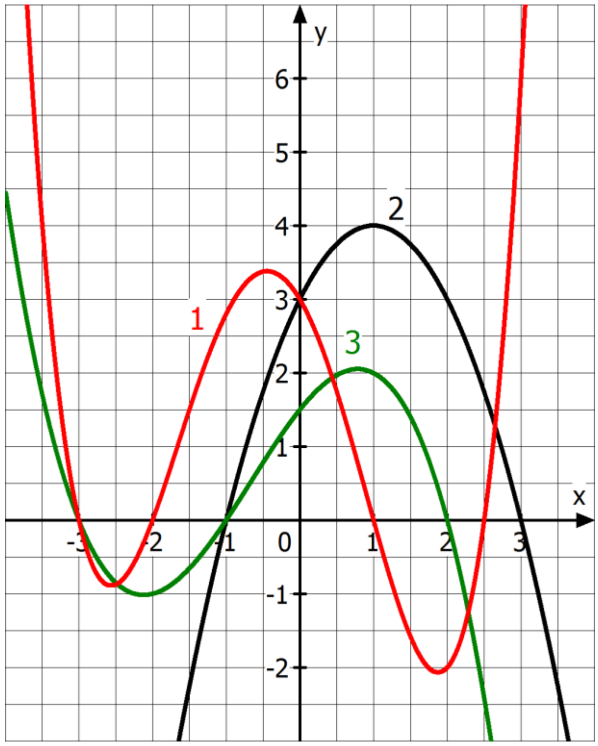
1 Ganzrationale Funktionen – Verhalten an den Rändern und nahe Null

Aufgabe 1: Graphen ganzrationaler Funktionen zuordnen[1]

a) Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen. Zu allen Funktionsgleichungen sind die passenden Graphen 1 bis 3 angegeben. **Ordne** ohne GTR **zu**, welcher Graph zu welcher Funktionsgleichung gehört. **Erläutere** Deine Gedanken.

$f(x) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{3}{10}x^3 - \frac{9}{5}x^2 - \frac{17}{10}x + 3,\quad g(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}5x^2 + 1{,}25x + 1{,}5,\quad h(x) = -x^2 + 2x + 3$

$i(x) = -\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2),\quad j(x) = -(x+1)(x-3)$



Funktionen mit den obigen Funktionsgleichungen nennt man ganzrationale Funktionen. Sie sind folgendermaßen definiert:

Definition:

Eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form $\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$ heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades**. Dabei sind $\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n}$ reelle Zahlen mit $\mathbf{a_n \neq 0}$. Sie heißen **Koeffizienten** und $\mathbf{a_0}$ heißt **absolutes Glied.** Die Zahl **n** ist eine natürliche Zahl und bezeichnet den **Grad** der Funktion bezeichnet.

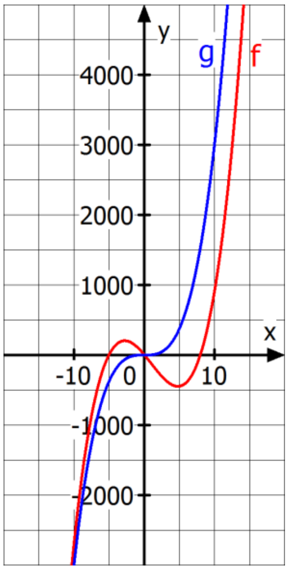
Beispiel: Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x$ eine ganzrationale Funktion 3-ten Grades mit Absolutglied $a_0 = 0$.

b) **Gib** zu den obigen drei Funktionsgraphen den Grad und das absolute Glied **an** und **zeige** durch Ausmultiplizieren, dass i(x) = g(x) und j(x) = h(x) gilt, so dass auch durch i(x) und j(x) ganzrationale Funktionen beschrieben werden.

[1] Idee aus: Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 2: Verhalten des Graphen für $x \to \pm\infty$ (lies: „x gegen plus/minus unendlich“)

Gegeben seien die Graphen der beiden ganzrationalen Funktionen f und g mit $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5$ und $g(x) = 3x^3$ (vgl. rechts).



a) **Fülle** die Tabellen mithilfe des GTR (MENU 7) **aus**.

x	10	100	1000	10000	100000
f(x)					
g(x)					

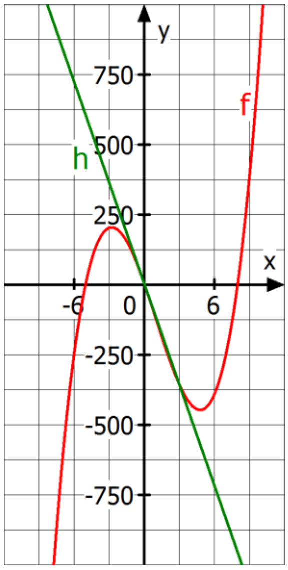
x	-10	- 100	- 1000	- 10000	- 100000
f(x)					
g(x)					

b) **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

c) **Begründe,** dass $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5 = 3x^3 \cdot \left(1 - \frac{9}{3x} - \frac{120}{3x^2} + \frac{5}{3x^3}\right)$ gilt und sich die Funktionswerte von f und g für betragsmäßig große x-Werte beliebig nahe kommen. Es gilt daher $f(x) \approx g(x)$ für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 3: Verhalten des Graphen für x nahe Null

Gegeben seien die Graphen der beiden ganzrationalen Funktionen f und h mit $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5$ und $h(x) = -120x + 5$ (vgl. rechts).



a) **Fülle** die Tabellen mithilfe des GTR (MENU 7) **aus**.

x	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)					
g(x)					

x	- 0,5	- 0,1	- 0,01	- 0,001	- 0,0001
f(x)					
g(x)					

b) **Beschreibe** Deine Beobachtungen.

c) **Begründe,** dass $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5 = -120x \cdot \left(-\frac{3x^2}{120} + \frac{9x}{120} + 1\right) + 5$ gilt und sich die Funktionswerte von f und h für betragsmäßig kleine x-Werte beliebig nahe kommen. Es gilt daher $f(x) \approx h(x)$ für x nahe Null.

Aufgabe 4: Graphen skizzieren[2]

Gegeben ist die Funktion f.

a) **Untersuche** das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \pm\infty$ und x nahe Null. **Gib** den Grad von f und das absolute Glied **an**. **Skizziere** ohne GTR einen Verlauf des Graphen von f.

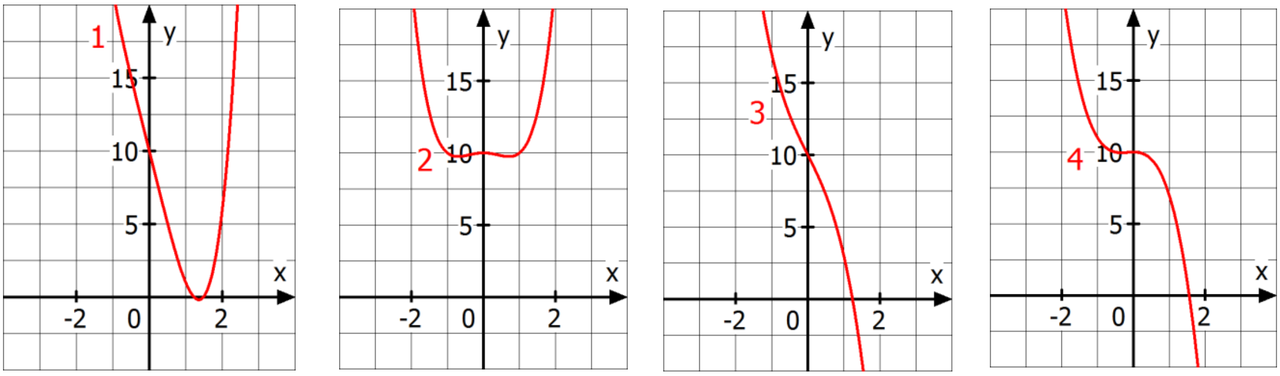
(1) $f(x) = 3x^3 - 4x^5 - x^2$ (2) $f(x) = 1 - 2x + x^6 + x^3$ (3) $f(x) = 3x - 0{,}01x^7 + x^6 + 2$

b) **Überprüfe** Deine Ergebnisse mit dem GTR.

Aufgabe 5: Graphen zuordnen[3]

a) **Ordne** begründend den Funktionsgleichungen die Graphen 1 bis 4 zu. Es sind zwei Funktionsgleichungen zu viel angegeben. **Skizziere** von diesen zunächst ohne GTR die Graphen.

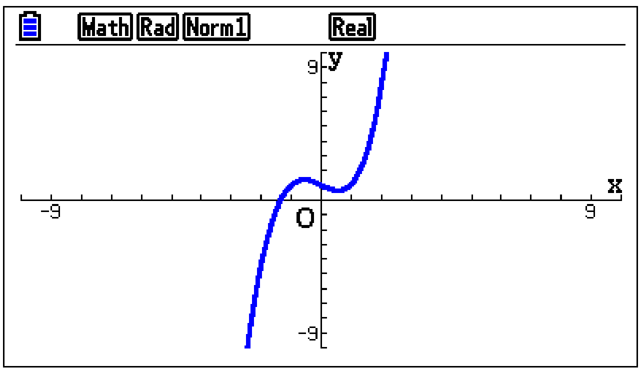
$f(x) = -2x^3 + 2x + 10$ $g(x) = x^4 - x^2 + 10$ $h(x) = -2x^3 - x^2 + 10$
$i(x) = -2x^3 - 5x + 10$ $j(x) = x^4 + x^2 + 10$ $k(x) = x^4 - 10x + 10$



b) **Überprüfe** Deine Ergebnisse mit dem GTR.

Aufgabe 6: Darstellungsbereich einstellen

Peter lässt sich den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{25}x^4 + 3x^3 - x + 1$ mit dem GTR wie in der Abbildung rechts anzeigen. Peter ist mit der Anzeige nicht zufrieden: „Man kann den Graphen gar nicht richtig erkennen.“



a) **Erläutere**, was Peter gemeint haben könnte.

b) **Korrigiere** die Darstellung durch Angabe einer passenden Fenstereinstellung.

c) **Bestimme** über G-Solve alle Nullstellen und Extrempunkte des Graphen von f.

[2] Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)
[3] Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 7: GRF in Produktform untersuchen

a) **Untersuche** das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ und x nahe Null zunächst ohne GTR. [Hinweis: Multipliziere die Funktionsterme aus.]

(1) $f(x) = (x-2)^2$ (2) $f(x) = -(x^2+1{,}5) \cdot 200x^3$ (3) $f(x) = \frac{(x-5)(12-x)}{25}$ (4) $f(x) = (x-1)^2(x-7)$

b) **Kontrolliere** Deine Ergebnisse anschließend mit dem GTR unter Berücksichtigung eines passenden Darstellungsbereichs.

Zusammenfassung:

Sei f eine ganzrationale Funktion mit $\mathbf{f(x) = a_n x^n + \cdots + a_k x^k + a_0}$. f hat den Grad n und $0 < k \leq n$ bezeichnet die niedrigste Potenz von x.

Wir können folgende Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und ihrer Graphen festhalten:

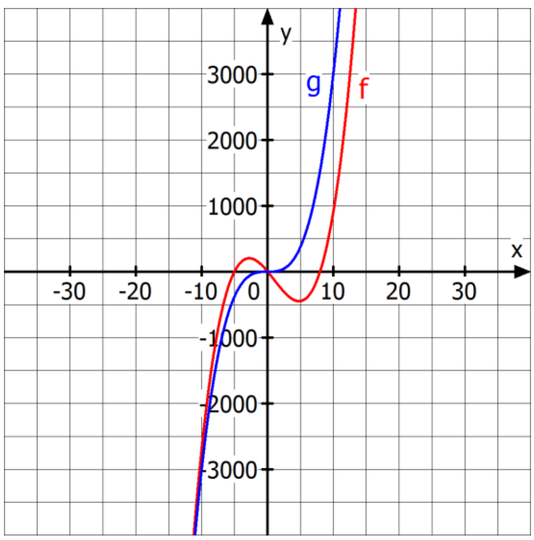
Verhalten für $x \to \pm\infty$ (Verhalten an der Rändern, Verhalten im Unendlichen)

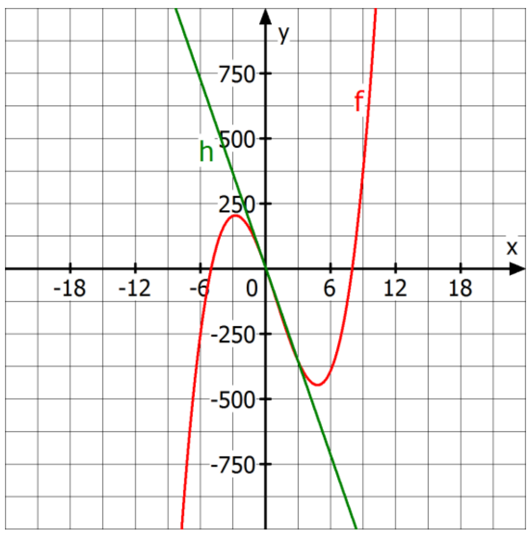
- Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion bestimmt vom **Summanden mit der höchsten Potenz n von x.**
- Der Graph verhält sich wie derjenige Graph mit der Gleichung $\mathbf{g(x) = a_n x^n}$

Verhalten für x nahe bei 0

- Für $x \to \pm\infty$ wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion bestimmt von den **Summanden mit der niedrigsten Potenz von x.**
- Der Graph verhält sich wie derjenige Graph mit der Gleichung $\mathbf{h(x) = a_k x^k + a_0}$.

Beispiel: $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5$. f hat den Grad n = 3 und besitzt für $x \to \pm\infty$ die „Näherungsfunktion" $g(x) = 3x^3$ (Abb. links). Der Graph von f verhält sich für x nahe Null wie der Graph der Funktion h mit $h(x) = -120x + 5$ (k = 1, Abb. rechts).





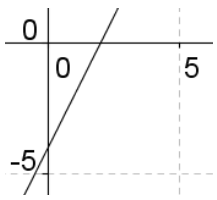
2 Nullstellen und Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1: Nullstellenbestimmung mit dem GTR

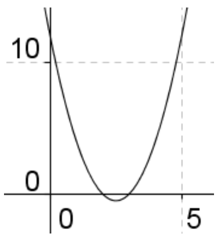
Zur Erinnerung: Nullstellen einer Funktion f sind diejenigen x-Werte, an denen der Graf der Funktion die x Achse schneidet oder berührt.

Im Folgenden siehst Du einige Grafen von ganzrationalen Funktionen.

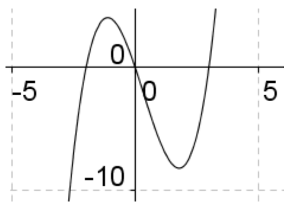
$f_1(x) = 2x - 4$



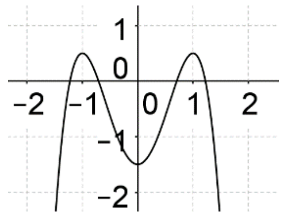
$f_2(x) = 2x^2 - 10x + 12$



$f_3(x) = x^3 - x^2 - 6x$



$f_4(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1{,}5$



a) **Lies** aus den Grafen ungefähr die Nullstellen **ab**.

b) **Überprüfe** Deine Ablesungen mit dem GTR im MENU 5 und im MENU A. [Hinweis im MENU 5: Funktionsterm eingeben → DRAW → G-Solv → ROOT; Hinweis im MENU A: F2 → Grad der GRF eingeben → Koeffizienten der GRF eingeben]

Aufgabe 2: Nullstellen berechnen

Zur Erinnerung: Um Nullstellen einer Funktion f zu berechnen, muss folgende Gleichung gelöst werden: f(x) = 0.

a) **Berechne** die Nullstellen von f_1 und f_2 aus Aufgabe 1.

b) Der Funktionen k, l und m mit $k(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$, $l(x) = (x - 1) \cdot (x + 9) \cdot (x + 2)$ und $m(x) = x^2 \cdot (x + 3) \cdot (2x - 2)$ gehören auch zu den ganzrationalen Funktionen. Sie wurden in ihre sogenannten **Linearfaktoren** zerlegt. Man kann die Nullstellen nun **Ablesen**.

(1) **Lies** die Nullstellen der Funktionen k, l und m **ab**. [Hinweis: Ein Produkt mehrerer Faktoren ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.]

(2) **Ermittle** jeweils den Grad, das absolute Glied a_0 und die Vergleichsfunktion g für $x \to \pm\infty$.

c) Um bei ganzrationalen Funktion mit einem Grad n > 2 die Nullstellen zu berechnen, kann man im Falle $a_0 = 0$. d. h. $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_k x^k = 0$, auf das **Verfahren des Faktorisierens** (Ausklammern) zurückgreifen. Man geht dabei folgendermaßen vor:

1. Man faktorisiert mit x^k die niedrigste Potenz von x und erhält ein Produkt der Form $x^k \cdot (\cdots)$.
2. Da $x^k = 0$ für x = 0 ist, erhält man als erste Nullstelle die (k-fache) Nullstelle x = 0.
3. Für die Bestimmung der restlichen Nullstellen setzt man die Klammer Null: (…) = 0.

Berechne die Nullstellen von f_3 mit dem Verfahren des Faktorisierens.

d) Tauchen nur zwei Potenzen von x auf, von denen eine doppelt so groß ist wie die andere, d. h. $f(x) = a_{2k}x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0$, wendet man das **Verfahren der Substitution** (Ersetzen) an. Dabei geht man folgendermaßen vor:

1. Substituiere die niedrigere Potenz von x: $x^k = z$.
2. Man erhält die quadratische Gleichung $a_{2k}z^2 + a_k z + a_0 = 0$, die zu lösen ist.
3. Die Lösungen von z werden nun rücksubstituiert: $x^k = z$ wir nach x aufgelöst.

Berechne die Nullstellen von f_4 mit dem Verfahren des Faktorisierens.

Aufgabe 3: Ablesen, Faktorisieren und Substitution

Berechne die Nullstellen der Funktion f ohne GTR. **Überprüfe** die Ergebnisse im MENU 5 und MENU A mit dem GTR.

a) $f(x) = (x-2)(x+3)(4x+2)$ b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ c) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

Aufgabe 4: Funktionsterme konstruieren

Gib zwei ganzrationale Funktionen dritten Grades an, die nur die angegebenen Nullstellen besitzen. **Überprüfe** Deine Ergebnisse mit dem GTR.

a) 0, 2 8 b) -5, 10 c) -3, 1 d) 3

e) **Konstruiere** ein **Polynom**[4] 7. Grades, dessen Polynomfunktion 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Nullstellen hat.

f) **Begründe**, warum es keine ganzrationale Funktion 7. Grades ohne Nullstelle bzw. mit mehr als sieben Nullstellen geben kann.

Aufgabe 5: Nullstellen „gemischter“ Funktionen

Bestimme mit dem GTR mögliche Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x^2+1}$ und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x^2+1} - x^2$.

Aufgabe 6: Gleichungen lösen und x- sowie y-Wert mit GTR bestimmen

a) **Löse** die folgende Gleichung auf möglichst viele unterschiedliche Arten mit dem GTR und **vergleiche** die Lösungsverfahren.

(1) $x^2 - 5 = -x^3 + 6x^2 + 2x - 9$ (2) $20x^2 - 5 = -x^3 + 6x^2 + 2x - 9$

b) **Bestimme** mit dem GTR alle Stellen x, an denen die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ den Wert 5 annimmt.

c) **Berechne** den Funktionswert an der Stelle -5.

---

[4] Polynome sind Funktionsterme ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 7: Wann ist der Graph einer GRF symmetrisch?[5]

a) **Vergleiche** mithilfe des GTR die Funktionswerte der Funktion f an den Stellen x = 1 und x = -1, x = 2 und x = -2 sowie x = 3 und x = -3. Notiere Deine Beobachtungen.

(1) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ (2) $g(x) = x^3 - x$ (3) $h(x) = x^3 + x^2$ (4) $k(x) = x^8 - x^2$

b) **Berechne** nun die Funktionswerte an den Stellen x = a und x = -a für eine beliebige Zahl a.

c) **Zeichne** die Grafen mit dem GTR und **untersuche**, welche Bedeutung die bisherigen Ergebnisse für die dazugehörigen Graphen haben.

d) **Formuliere** Deine Entdeckungen und **gib** weitere Funktionsgleichungen **an**, für die Deine Entdeckung ebenfalls zutrifft.

Aufgabe 8: Gerade oder ungerade Funktion?

Funktionen mit einem zur y-Achse achsensymmetrischen Grafen heißen **gerade** Funktionen. Hier gilt für eine beliebige Stelle a: $\mathbf{f(-a) = f(a)}$. Funktionen, deren Grafen symmetrisch zum Ursprung sind, heißen **ungerade** Funktionen. Hier gilt für eine beliebige Stelle a: $\mathbf{f(-a) = -f(a)}$.

a) **Untersuche**, ob folgende Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind:

(1) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ (2) $g(x) = \frac{2}{x^2+4}$ (3) $h(x) = x - \frac{x}{x^2-1}$ (4) $k(x) = x - \frac{x}{x^3-x}$

b) **Überprüfe** Deine Ergebnisse mit dem GTR.

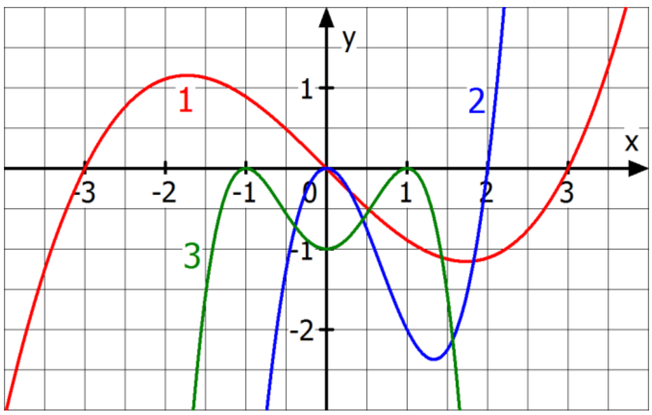
Aufgabe 9: Kurvenuntersuchung mithilfe der bisherigen Kriterien

a) **Erstelle** eine Skizze des Grafen der Funktion f. **Berücksichtige** dabei das Verhalten an den Rändern, das Verhalten nahe Null, Schnittstellen mit den Koordinatenachsen und eine mögliche Symmetrie des Funktionsgrafen.

(1) $f(x) = x^3 - x^2$ (2) $g(x) = -x^4 + 2x^2$ (3) $h(x) = 4x^3 + x$

b) Im Bild rechts sind drei Grafen von ganzrationalen Funktionen angegeben. Die Grafen 1 und 2 haben den Grad 3, der Graf 3 besitzt den Grad 4.

Sammle möglichst viele Informationen in Bezug auf die bisherigen Kriterien zur Funktionsuntersuchung und **gib** möglichst genau Funktionsgleichungen für die Grafen 1 bis 3 **an**. **Begründe** Deine Auswahl.



c) **Überprüfe** Deine Ergebnisse mit dem GTR.

[5] Modifiziert nach: Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 10: Gilt immer – gilt nie – kommt darauf an[6]

Beurteile begründend, ob folgende Aussagen „immer zutreffen“, „nie zutreffen“ oder „unter bestimmten Bedingungen zutreffen“. **Gib** die Bedingung gegebenenfalls **an**.

a) Eine ungerade ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

b) Eine gerade Funktion hat eine gerade Anzahl von Nullstellen.

c) Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat genau 5 Nullstellen.

d) Wenn eine gerade Funktion die Nullstelle $x = 2$ besitzt, dann auch die Nullstelle $x = -2$.

Aufgabe 11: Ganzrationale Funktionen besuchen die Stochastik[7]

Auf einem Blatt Papier sind die Gleichungen ganzrationaler Funktionen angegeben:

$f(x) = x^7 + 2x^3 - 8x$	$f(x) = x^5 + 4x - 1$	$f(x) = -x^3 + x^2$	$f(x) = 6x^2 + 2$	$f(x) = -x^2$
$f(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^3 - x^2$	$f(x) = 3x + 1$

Harald wählt durch Tippen blind eine Gleichung aus. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Harald eine Funktion wählt, …

a) deren Graf symmetrisch zum Ursprung oder zur y-Achse ist.

b) deren Graf sich nahe Null wie $h(x) = x^2$ verhält und bei der für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$.

c) deren Graf durch den Ursprung geht oder symmetrisch zur y-Achse ist.

d) **Beschreibe** das Gegenereignis zum Ereignis aus c) und **gib** die Wahrscheinlichkeit **an**.

Aufgabe 12: Funktionsscharen

Durch die Gleichung $f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$ ist für jeden Wert für t eine ganzrationale Funktion gegeben. Zum Beispiel erhält man für t = 2 die Funktionsgleichung $f_2(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x$.

a) **Skizziere** Grafen der Funktionsschar mit dem GTR für t = -10, -9, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, 9, 10 und **beschreibe** wie sich die Grafen in Abhängigkeit von t verändern. [Hinweis: Wähle MENU 6 → BUILT IN → Y = Ax^3 + B x^2 + C x + D → VAR → SELECT B und SET → etwas Geduld ☺]

b) **Gib** den Wert für t **an**, so dass f_t eine ungerade Funktion ist.

c) **Begründe**, für welche Werte von t die Funktion f_t drei [zwei, eine] Nullstelle hat.

d) **Berechne** ohne GTR die Nullstellen der Funktionen f_2, f_{10} und f_{-10}.

e) **Bestimme** t so, dass f_t eine Nullstelle bei $x = 2$ hat.

---

[6] Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)
[7] Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)

Aufgabe 13: Merksätze übertragen

Übertrage die folgenden Merksätze des Kapitels in Dein Heft.

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat **höchstens** Nullstellen.

Beim Berechnen der Nullstellen ganzrationaler Funktionen können drei Verfahren hilfreich sein: Ablesen, Faktorisieren und Substitution.

(1) **Ablesen** ist möglich, wenn die Funktion nur aus Linearfaktoren besteht.

Beispiel: $f(x) = -0{,}5 \cdot (x-2)(x+3)^2(x+2)$ hat die Nullstellen **2, -3, -2**

(2) **Faktorisieren** ist möglich, wenn $a_0 = 0$. Man faktorisiert die niedrigste Potenz von x.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x^2 = \mathbf{x^2} \cdot (x-2)$. f hat daher die Nullstellen **0 (doppelte Nullstelle), 2.**

(3) **Substitution** ist möglich, wenn der Funktionsterm nur 2 Potenzen von x enthält, von denen eine doppelt so groß wie die andere.

Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 6 = \mathbf{z^2 - 2z + 6 = 0}$ mit der Substitution $\mathbf{z = x^2}$

Symmetrie ganzrationaler Funktionen

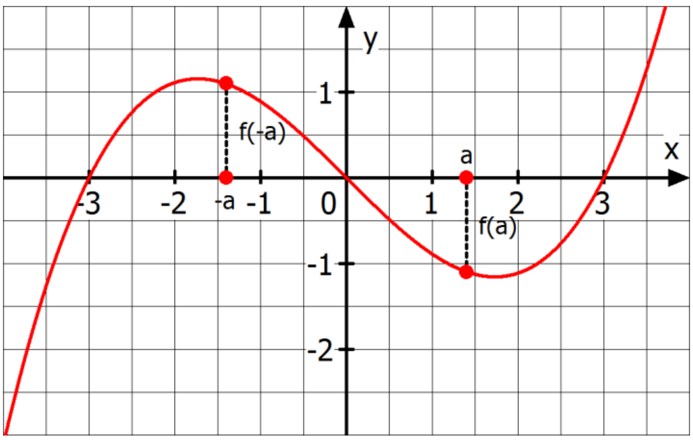
(1) Für eine {gerade/ungerade} ganzrationale Funktion f gilt:

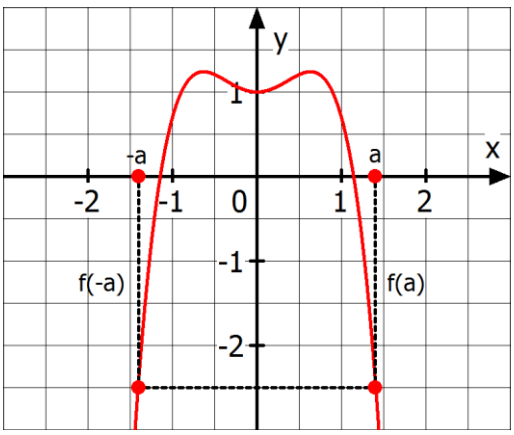
f(x) hat nur Potenzen von x mit {**geraden/ ungeraden**} Hochzahlen.

(2) Für den Grafen G_f einer {gerade/ungerade} Funktion gilt:

G_f ist symmetrisch {**zur y-Achse /zum Ursprung**}.

(3) Für eine {gerade/ungerade} Funktion f gilt für jedes $a \in D_f$: { $f(-a) = +f(a)$/ $f(-a) = -\ f(a)$}

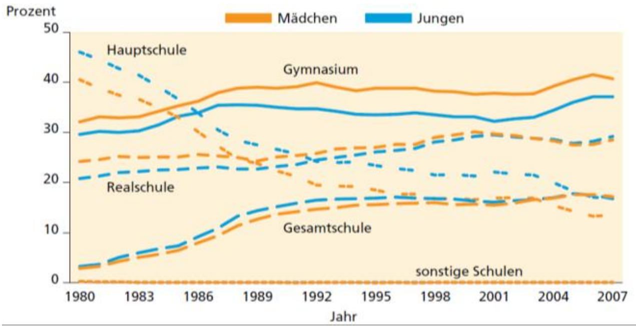




3 Monotonie und Extremstellen ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 1: Entwicklung der Schüleranteile auf weiterführenden Schulen

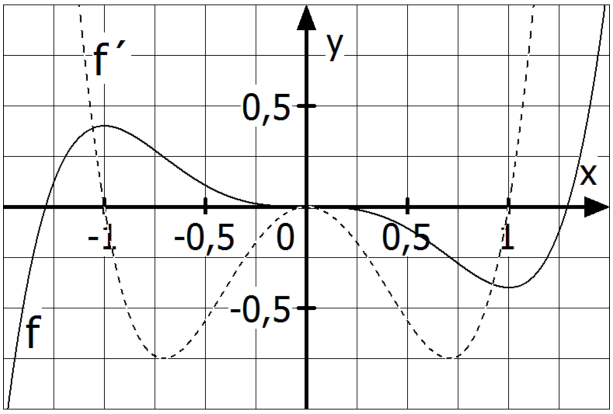
Im Folgenden siehst Du die Entwicklung des Anteils der Mädchen und Jungen beim Übergang von der Grundschule an ausgewählten Schulformen in NRW von 1980 bis 2008.[8]



Beschreibe die Entwicklung der verschiedenen Schulformen mit eigenen Worten. **Vergleiche** die Entwicklung von Mädchen- und Jungenanteilen. **Gib** Gründe für die Entwicklung **an**.

Aufgabe 2: Monotonie bei ganzrationalen Funktionen

In der folgenden Abbildung ist der Graf einer Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^3$ und der Graf seiner Ableitung f´ angegeben.



a) **Markiere** im Graphen von f die Bereiche, in den denen der Graf von f ansteigt (GRÜN), fällt (ROT) und die Steigung Null hat. **Kennzeichne** die entsprechenden Bereiche auch im Grafen von f´.

b) **Bestimme** $f'(x)$ und **ermittle** rechnerisch die Nullstellen von f´.

c) **Fülle** die nachfolgende **Vorzeichentabelle für f´** aus. [Nutze die Symmetrie von f´ aus.]

Intervall	x < -1		-1 < x < 0		0 < x < 1		x > 1
z. B. x_0	-2	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	2
$f'(x_0)$			$\mathbf{-0,5625}$				
Vorzeichen von f´	**+**						
Monotonie von f	↑						

d) **Notiere** Deine Beobachtungen in Form von Merksätzen.

e) **Untersuche** die Funktion g – wie in c) – mithilfe ihrer ersten Ableitung auf Monotonie, wenn:

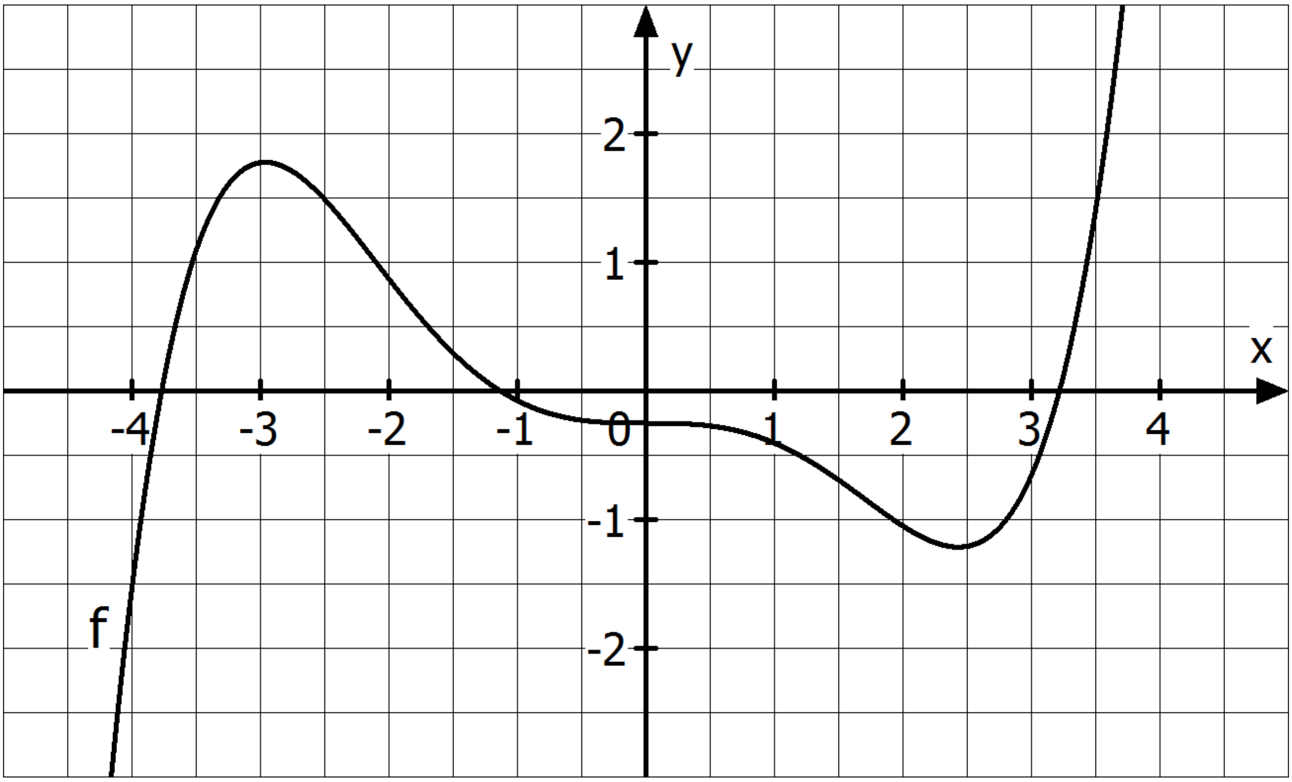
(1) $g(x) = x^2 + 1$ (2) $g(x) = x^3 - 9x$ (3) $g(x) = x - 2$ (4) $g(x) = x^4 + x^2$ (5) $g(x) = x^4 - x^2$

Überprüfe Deine Ergebnisse mit dem GTR.

[8] https://www.it.nrw.de/statistik/analysen/stat_studien/2009/band_59/venhaus_59.pdf (11.07.2016)

Aufgabe 3: Ablesen von Extrempunkten und Sattelpunkten

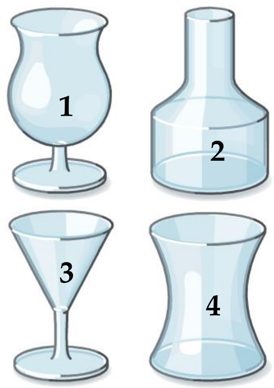
In der Abbildung ist der Graf einer ganzrationalen Funktion fünften Grades angegeben.



Markiere alle lokalen Hochpunkte, lokalen Tiefpunkte, Wendepunkte (hier ändert der Graf sein Krümmungsverhalten), Sattelpunkte (Wendepunkte mit waagerechter Tangente) und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, **gib** die Koordinaten der markanten Punkte **an** und **skizziere** den Grafen der Ableitungsfunktion im obigen Koordinatensystem.

Aufgabe 4: Flüssigkeitsoberfläche in Abhängigkeit von der Füllhöhe[9]

Beim Füllen verschiedener Gefäße verändert sich die Größe der Flüssigkeitsoberfläche mit zunehmender Füllhöhe. Sei h die Funktion, die jeder Füllhöhe eine Flüssigkeitsoberfläche zuordnet. Wir betrachten 4 verschiedene Gefäße (vgl. Abbildung rechts).



a) **Begründe**, bei welchen Gefäßen die Funktion h über die gesamte Füllhöhe hinweg monoton zunehmend bzw. abnehmend ist.

b) **Skizziere** den Verlauf von h für die übrigen Gefäße.

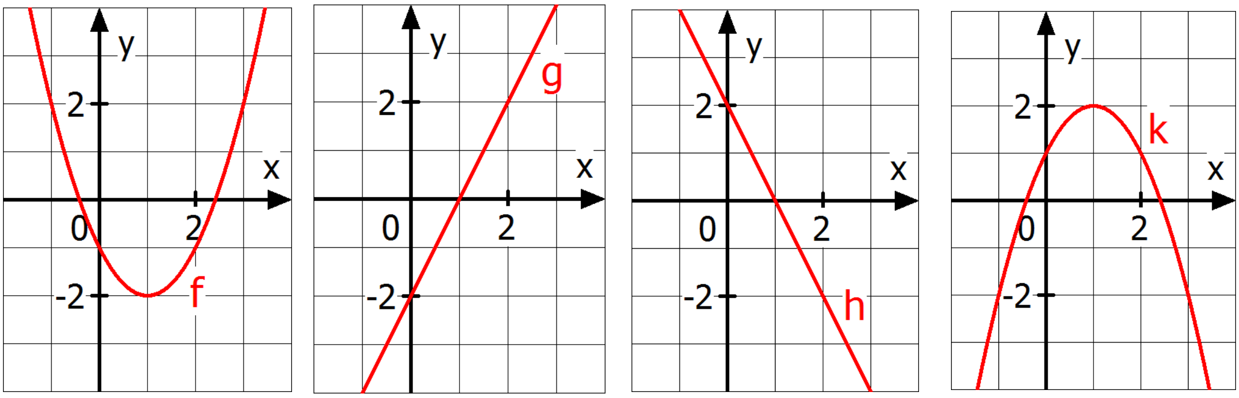
c) **Skizziere** jeweils zwei weitere Gefäße, bei denen der Verlauf von h über die gesamte Füllhöhe hinweg …

(1) **streng** monoton zunehmend bzw. abnehmend ist.
(2) monoton zunehmend bzw. abnehmend, nicht aber **streng** monoton zunehmend bzw. abnehmend ist.

[9] Modifiziert nach Lambacher Schweizer, Einführungsphase, Klett-Verlag (2014)

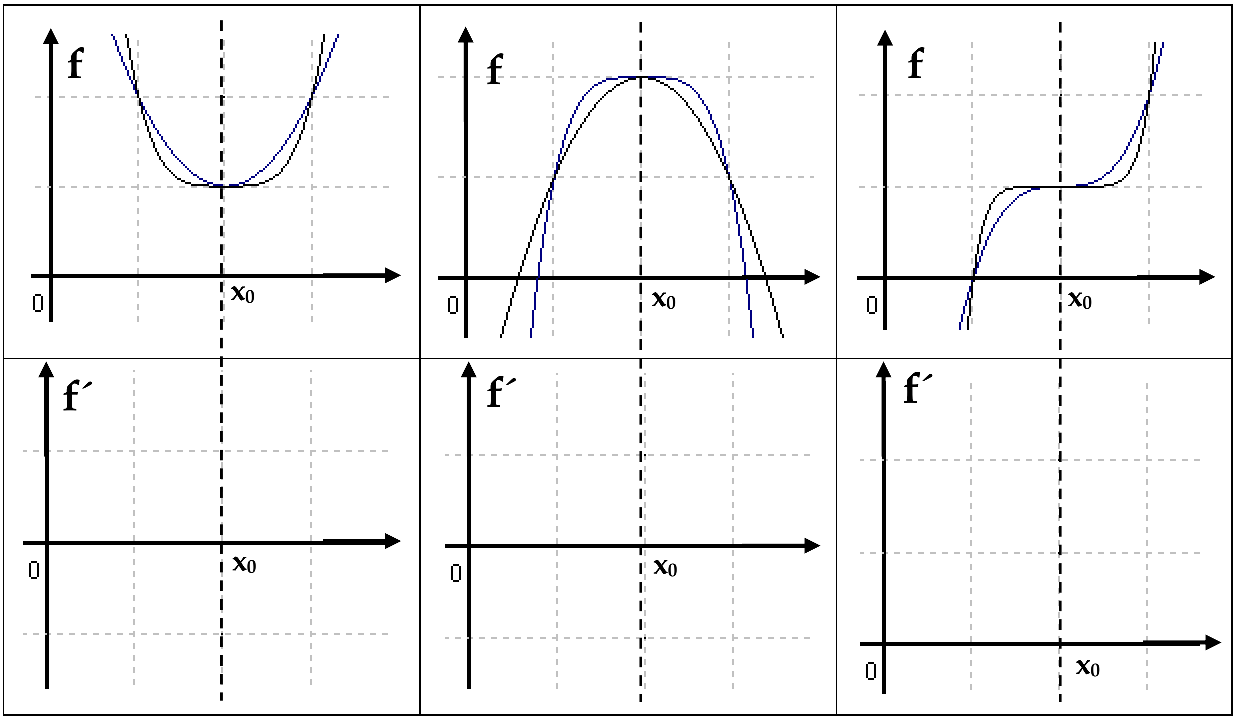
Aufgabe 5: Zusammenhang von f und f´ – Grafenpunkte mit Steigung Null

a) In den folgenden vier Abbildungen siehst Du Grafen von zwei Funktionen sowie der dazugehörigen Ableitungsfunktionen.



Begründe, welche zwei Graphen jeweils zusammengehören.

b) Nun wollen wir allgemein drei mögliche Fälle von Grafen unterscheiden, bei denen die Steigung an einer Stelle Null ist. Die folgenden drei Abbildungen verdeutlichten die drei Fälle.



Skizziere in den drei freien Feldern jeweils den Grafen der Ableitungsfunktion.

c) **Formuliere** Merksätze in der Form:

(1) „Wenn x_0 eine lokale Maximumstelle (lokale Minimumstelle, Sattelstelle) ist, dann …“
(2) „Wenn …, dann ist x_0 eine lokale Maximumstelle (lokale Minimumstelle, Sattelstelle.“

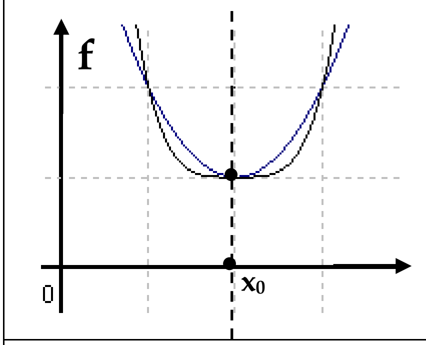
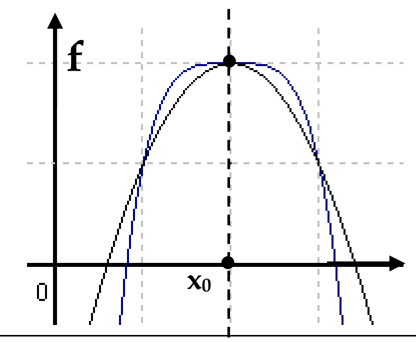
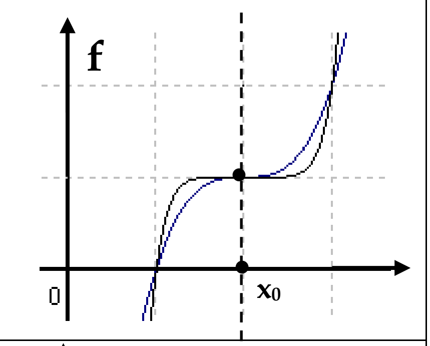
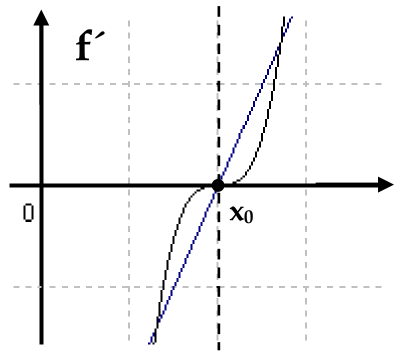
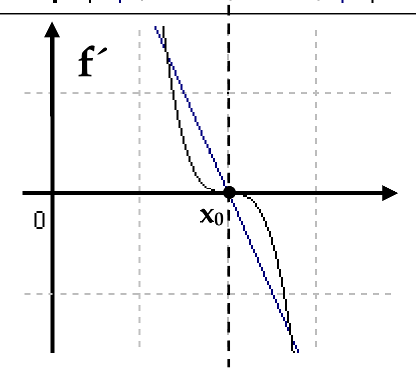
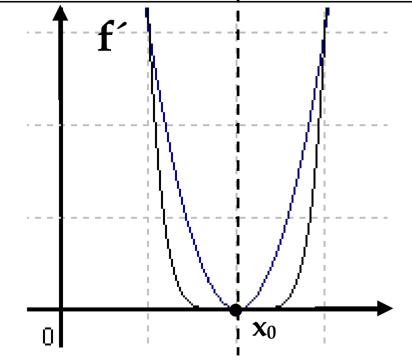
Erläutere die Unterschiede zwischen den beiden Aussageformen (1) und (2) am Beispiel der Aussagen „Die Straße ist nass.“ und „Es hat geregnet.“.

Aufgabe 6: Merksätze übertragen

Übertrage folgende **Merksätze** des Kapitels in Dein Heft.

Satz zur Monotonie
(1) <u>**Wenn**</u> $f´(x) > 0$ für alle x eines Intervalls ist, **<u>dann</u>** ist der Graf von f über I **streng monoton zunehmend (wachsend).** (2) **<u>Wenn</u>** $f´(x) < 0$ für alle x eines Intervalls I ist, **<u>dann</u>** ist der Graf von f über I **streng monoton abnehmend (fallend).** Die Umkehrungen gelten nicht.

Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen: $f´(x_0) = 0$
<u>Wenn</u> an der Stelle x_0 eine lokale Extremstelle vorliegt, **<u>dann</u>** gilt: $\mathbf{f´(x_0) = 0}$. Die Umkehrung gilt **nicht.**

Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen: $f´(x_0) = 0 \land f´$ hat bei x_0 einen VZW		
		
		
<u>Wenn</u> $f´(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **– nach +** hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine **lokale Minimumstelle** von f.	**<u>Wenn</u>** $f´(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von **+ nach –** hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine lokale **Minimumstelle** von f.	**<u>Wenn</u>** $f´(x_0) = 0$ **und** f´ an der Stelle x_0 **keinen** Vorzeichenwechsel hat, **<u>dann</u>** ist x_0 eine **Sattelstelle** von f.
Die Umkehrungen der hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen gelten **nicht.**[10]		

[10] Es lassen sich Gegenbeispiele von Funktionen angeben mit einer Extremstelle ohne VZW von f´.

Aufgabe 7: Anwenden der hinreichenden Bedingung für Extremstellen

Wende die hinreichende Bedingung für Extremstellen auf die Funktionen in Aufgabe 2e) an und **skizziere** die Grafen ohne GTR. **Überprüfe** Deine Ergebnisse anschließend mit dem GTR.

Aufgabe 8: Gegenbeispiele

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. **Widerlege** folgende Aussagen mithilfe des angegebenen Gegenbeispiels.

a) Wenn f über I **streng** monoton zunehmend ist, dann kann nie $f'(x) = 0$ sein, d. h. es gilt: $f'(x) > 0$ für alle x des Intervalls I. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$.

b) Wenn $f'(x_0) = 0$ für ein x_0 des Intervalls I, dann ist x_0 eine Extremstelle. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ und die Stelle $x_0 = 0$.

c) Wenn $f'(x) > 0$ für alle x des Intervalls ist, dann ist f dort monoton wachsend, nicht aber streng monoton wachsend. Gegenbeispiel: $f(x) = x$.

Aufgabe 9: Wahr oder falsch?

Prüfe begründend, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Ist die Ableitungsfunktion f´ eine quadratische Funktion mit zwei Nullstellen, so besitzt der Graf von f genau einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt.

b) Zu jeder Nullstelle der Ableitungsfunktion f´ gehört eine Extremstelle von f.

c) Zwischen zwei benachbarten Extrempunkten auf dem Grafen von f liegt immer ein Schnittpunkt mit der x-Achse.

d) Besitzt eine ganzrationale Funktion vierten Grades genau zwei Hochpunkte und einen Tiefpunkt, so ist der Graf ihrer zweiten Ableitung eine nach oben geöffnete Parabel.

e) Der Grad der Funktion ist 3. Die Funktion ist ungerade und hat eine Minimumstelle bei $x = 1$ und eine Maximumstelle bei $x = 2$.

f) Eine ganzrationale Funktion sechsten Grades kann höchstens fünf Extremstellen besitzen.

g) Besitzt die Ableitung einer Funktion f genau drei Nullstellen, so besitzt die Funktion genau drei Extremstellen.

h) Eine Funktion dritten Grades verläuft von links oben nach rechts unten. Der Graph der Ableitung ist eine nach unten geöffnete Parabel.

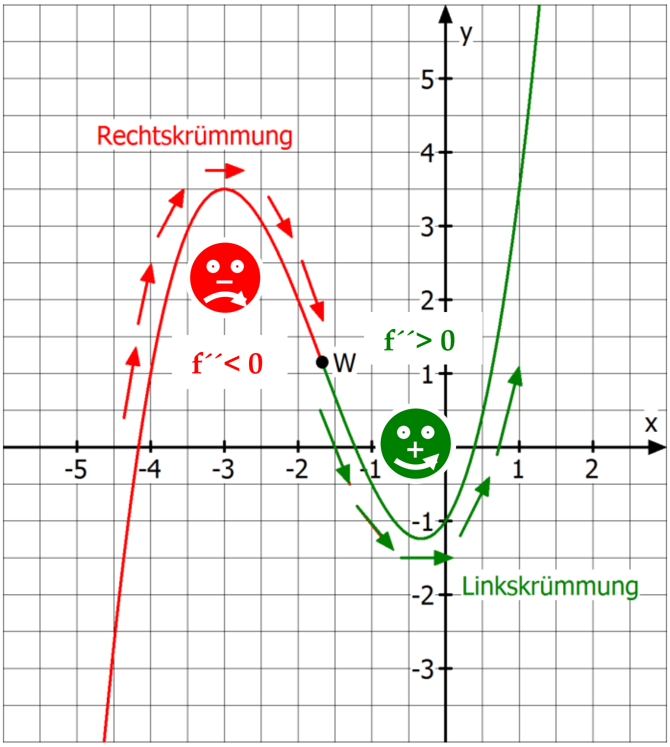
i) Jede Funktion vierten Grades hat mindestens eine Extremstelle.

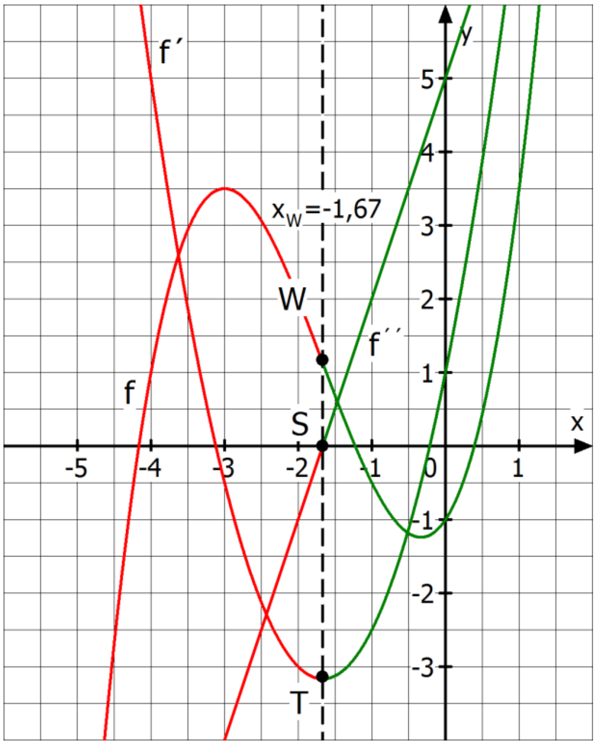
4 Krümmungsverhalten und Wendestellen

Aufgabe 1: Rechts- und Linkskurve – Wendepunkt

a) **Lies** den nachfolgenden Text und **erläutere** anhand des Beispiels, was man in der Mathematik unter einer Links- und Rechtskrümmung bzw. einem Wendepunkt versteht.

Der Kurvenverlauf einer Straße wird oft mit dem Begriff Rechts- oder Linkskurve beschrieben. Die Abb. rechts zeigt eine Serpentine, auch Schlangenlinie genannt. Je nach Fahrtrichtung liegt eine Rechts- oder Linkskurve vor. Wird ein Teil einer Serpentine in ein Koordinatensystem übertragen, so ist die „Fahrtrichtung" durch einen Übergang von kleineren zu größeren x-Werten gegeben. Damit wird eindeutig zwischen Rechts- und Linkskurve unterschieden. In der Mathematik wird in diesem Zusammenhang die Bezeichnung Rechts- oder Linkskrümmung benutzt (vgl. Abb. links).





Merke: Am Wendepunkt W liegt ein Krümmungswechsel vor. Die Wendestelle von f ist Extremstelle von f´ und Nullstelle von f ´´.

f´´ < 0 ☹
f´ ist monoton fallend
f ist rechtsgekrümmt

f´´ > 0 ☺
f´ ist monoton wachsend
f ist linksgekrümmt

In der Abb. rechts werden die Graphen einer Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 + 2{,}5x^2 + 1{,}5x - 1$ sowie die die Grafen der ersten und zweiten Ableitung dargestellt. Man erkennt ein Kriterium für das Krümmungsverhalten von Grafen:

Ist **f´´(x) < 0** für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **rechtsgekrümmt**. Dabei ist **f´** auf I **streng monton fallend**.

Ist **f´´(x)** > 0 für alle $x \in I$, so ist **f** auf I **linksgekrümmt.** Dabei ist **f´** auf I **streng monton wachsend**.

Der Punkt W, in dem sich das Krümmungsverhalten ändert, wird als **Wendepunkt** bezeichnet. Die Wendestelle x_W (= x-Wert des Wendepunktes) ist eine lokale Extremstelle der ersten Ableitung und gleichzeitig eine Nullstelle der zweiten Ableitung.

b) In der folgenden Beispielaufgabe wird erklärt, wie man eine Funktion f auf ihr Krümmungsverhalten untersuchen kann. **Arbeite** das Beispiel Schritt für Schritt **durch.**

Untersuche das Krümmungsverhalten der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 + 2{,}5x^2 + 1{,}5x - 1$.

1. Schritt

Bildung von f´(x) und f´´(x):

$f'(x) = 1{,}5x^2 + 5x + 1{,}5$

$f''(x) = 3x + 5$

Lösungshinweise

→ Die Ableitung f´ einer Funktion f gibt den Anstieg der Funktion an.

→ Die Ableitung der Ableitungsfunktion f´ ist die zweite Ableitung f´´ und gibt den Anstieg der Ableitungsfunktion f´ an.

2. Schritt

Bestimmung der Nullstellen von f´´:

$f''(x) = 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} = -1,\overline{6} \approx 1{,}67$

Lösungshinweise

→ In den Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion wechselt das Vorzeichen von f´´ und damit auch die Krümmung von f.

3. Schritt

Vorzeichenwechseltabelle von f´´ aufstellen:

Intervall	$x < -1,\overline{6}$		$x > -1,\overline{6}$
z. B. x_0	-2	$-1,\overline{6}$	0
$f''(x_0)$	-1	0	5
VZ von f´´	−		+
Krümmung	☹	WP	☺

Lösungshinweise

→ Durch die berechnete Nullstelle ergeben sich zwei Intervalle.

→ Setze aus jedem Intervall einen beliebigen x-Wert in die zweite Ableitung ein.

→ Weitere Krümmungswechsel sind nicht möglich, da sonst weitere Nullstellen existieren müssten.

Antwort: Die Funktion f hat an der Stelle $x = -\frac{5}{3}$ eine Rechts-Links-Wendestelle. Am Wendepunkt $W(-\frac{5}{3} / \, f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{61}{54} \approx 1{,}13)$ ändert der Graf von f sein Krümmungsverhalten von einer rechts- in eine linksgekrümmte Kurve.

c) **Untersuche** die Funktion f wie im Beispiel unter b) auf ihr Krümmungsverhalten und **skizziere** mit dem GTR Grafen der Funktion sowie der ersten und zweiten Ableitung in ein Koordinatensystem.

(1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 + 2x$

(2) $f(x) = x^4 + 0{,}5x^3 - 25x^2 - 12{,}5x$

d) **Übertrage** folgende Merkregeln für das Vorliegen von Wendestellen in Dein Heft.

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x_0) = 0$

Wenn an der Stelle x_0 eine Wendestelle vorliegt, **dann** gilt $\mathbf{f''(x_0) = 0}$.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f'(x_0) = 0$ und VZW von f´´ bei x_0

Wenn $f''(x_0) = 0$ und f´´ an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $\left\{\begin{matrix} - \textbf{ nach } + \\ + \textbf{ nach } - \end{matrix}\right\}$ hat,

dann ist x_0 eine $\left\{\begin{matrix} \textbf{Rechts} - \textbf{Links} - \textbf{Wendestelle} \\ \textbf{Links} - \textbf{Rechts} - \textbf{Wendestelle} \end{matrix}\right\}$ Wendestelle von f

Aufgabe 2: Hinreichende Bedingung für Extrem- und Wendestellen

a) **Gib** die notwendige und hinreichende Bedingung für eine lokale Maximumstelle mittels f´ an.

b) **Begründe** die folgende Aussage:

Wenn $f'(x_0) = 0$ und f bei x_0 rechtsgekrümmt ist, dann liegt bei x_0 eine Maximumstelle vor.

c) **Erkläre**, wie sich aus b) folgern lässt:

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann liegt bei x_0 eine Maximumstelle vor.

d) **Formuliere** nun analog die hinreichende Bedingung für eine lokale Minimumstelle.

e) In der letzten Aufgabe haben wir gesehen, dass die Wendestelle mehrere „Gesichter" haben kann. Eine Wendestelle ist gleichzeitig Extremstelle der ersten Ableitung und Nullstelle der zweiten Ableitung. **Formuliere** nun – wie in den Aufgaben c) und d) für die Funktion f geschehen – eine hinreichende Bedingung für die Ableitungsfunktion f´ mittels zweiter und dritter Ableitung.

f) **Begründe** folgende Aussage:

Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \begin{Bmatrix} > \\ > \end{Bmatrix} 0$ ist, dann ist x_0 eine $\begin{Bmatrix} \text{Rechts} - \text{Links} - \text{Wendestelle} \\ \text{Links} - \text{Rechts} - \text{Wendestelle} \end{Bmatrix}$ von f.

Aufgabe 3: Vollständige Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben sei die ganzrationale Funktion dritten Grades mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$.

a) **Untersuche** den Grafen der Funktion f auf Symmetrie.

b) **Beschreibe** das Verhalten im Unendlichen und nahe Null.

c) **Berechne** ohne GTR alle Schnittpunkte des Grafen von f mit den Koordinatenachsen.

d) **Ermittle** alle lokalen Hoch- und Tiefpunkte des Grafen von f.

e) **Untersuche** den Grafen von f auf sein Krümmungsverhalten.

f) **Skizziere** den Grafen von f zunächst ohne GTR und **überprüfe** anschließend Deine Ergebnisse mit dem GTR.

g) **Führe** eine vollständige Kurvenuntersuchung auch für die nachfolgenden Funktionen **durch**.

(1) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ (2) $f(x) = x^4 - x^3$ (3) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

Überprüfe anschließend mit dem GTR.

5 Ganzrationale Funktionen im Sachkontext untersuchen

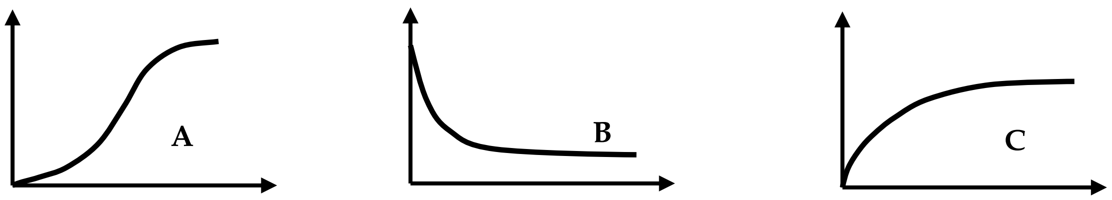
Aufgabe 1: Begriffe der Differentialrechnung im Sachkontext deuten

a) **Interpretiere** den Begriff der Änderungsrate in den folgenden Sachkontexten. f(t) beschreibt …

1 die Anzahl der Personen, die ein Gerücht nach der Zeit t zum ersten Mal gehört haben.
2 die Anzahl der Autos, die nach t Minuten eine Messstelle passiert haben.
3 die Produktionskosten, die bei t produzierten Artikeln anfallen.
4 die zugeflossene Wassermenge in einen Stausee nach der Zeit t.
5 die Anzahl der Bakterien in einer Kultur nach t Stunden.
6 die Schadstoffkonzentration eines Autos bei einer Geschwindigkeit t.
7 die Temperatur eines Brandherdes nach einer bestimmten Zeit t.
8 die Anzahl der Deutschen [Afghanen], die höchstens t Jahre alt sind.
9 das Wasserstoffvolumen einer Lösung aus Zink und Salzsäure nach der Zeit t.[11]
10 die Anzahl der radioaktiven Teilchen Caesium 137 nach einer bestimmten Zeit t.

b) **Erläutere**, was Monotonie und Krümmung des Graphen von f im Sachkontext bedeuten.

c) **Begründe**, zu welchen realen Situationen die drei Diagramme passen könnten.



Lösungen:

a)	**Änderungsrate**
1	Verbreitungsgeschwindigkeit des Gerüchts
2	Verkehrsdichte; Verkehrsfluss
3	Kostenanstieg; Kostensteigerung
4	Zuflussgeschwindigkeit
5	Bakterienwachstum; Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur
6	Schadstoffanstieg
7	Temperaturanstieg; Geschwindigkeit, mit der sich die Temperatur verändert
8	Altersgemäße Bevölkerungsdichte
9	Reaktionsgeschwindigkeit
10	Zerfallsgeschwindigkeit

b) Die Monotonie beschreibt die Zu- und Abnahme der Ausgangsgröße f(t). Eine Linkskrümmung der Graphen von f bedeutet, dass die Änderungsrate zunimmt. Bei einer Rechtskrümmung nimmt die Änderungsrate ab. **c)** A1 (Verbreitungsgeschwindigkeit steigt zunächst langsam, dann schneller, um dann wieder abzunehmen, da alle das Gerücht bereits kennen.), A8 (Es gibt in Deutschland am meisten Menschen mittleren Alters), B10 (Radioaktivität nimmt exponentiell ab), C10 (Zu Beginn reagiert Zink sehr stark bis es bei abnehmender Reaktionsgeschwindigkeit zu einem Gleichgewichtszustand kommt.). C8 (In Entwicklungsländern gibt es viele junge Menschen und aufgrund der niedrigen Lebenserwartungen deutlich weniger Menschen mittleren Alters und noch weniger alte Menschen)

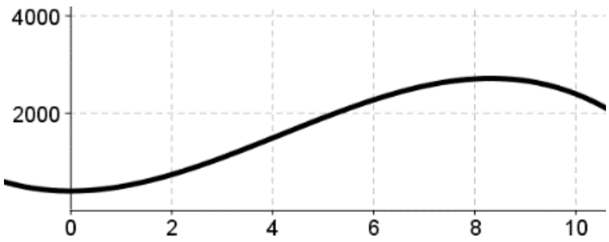
[11] Es gilt $Zn + 2H^+ \rightarrow Zn^{2+} + H_2$

Aufgabe 2: Funktionsuntersuchung im Sachzusammenhang

Gegeben seien drei Bestandsfunktionen A, B und C, die alle einen zeitlichen Verlauf beschreiben. Die Graphen der Bestandfunktionen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

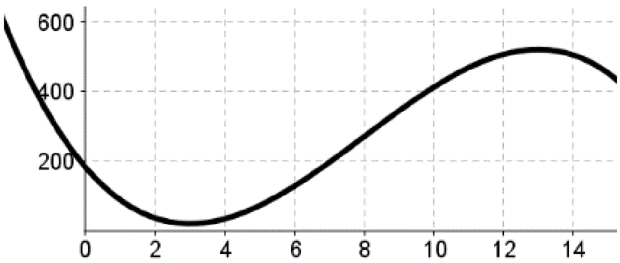
Mit Bakterien bedeckte Fläche

A ordnet der Zeit t (t in Stunden; 0 Uhr ≤ t ≤ 8 Uhr) die an Bakterien bedeckte Fläche A(t) (in cm²) zu. Für die Funktionsgleichung gilt: $\mathbf{A(t) = -8t^3 + 100t^2 + 400}$



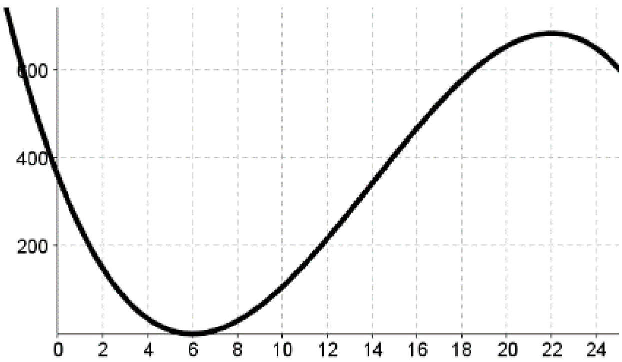
Besucheranzahl bei einem Schulfest

B ordnet der Zeit t (t in Stunden; 7:30 Uhr ≤ t ≤ 14 Uhr) die Anzahl der Besucher B(t) auf einem Schulfest zu. Für die Funktionsgleichung gilt: $\mathbf{B(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 182}$



Sauerstoffabgabe eines Baums

C ordnet der Zeit t (t in Stunden; 6 Uhr ≤ t ≤ 20 Uhr) die Menge an Sauerstoff C(t) (in Liter) zu, die ein Baum abgibt. Die Funktionsgleichung lautet: $\mathbf{C(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 14t^2 - 132t + 360}$



a) **Beschrifte** die Achsen der drei Diagramme und **markiere** in GRÜN den jeweiligen Bereich des Graphen, der zu den obigen Beständen passt.

b) **Entwickle** mindestens drei Fragestellungen zu jeder Bestandsfunktion und **löse** sie.

c) Die unten befindliche Tabelle gibt typische Aufgabenstellungen an und nennt dazugehörige Rechenansätze. Dabei ist die Reihenfolge durcheinandergeraten. **Ordne** zu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

	Typische Aufgabenstellung		Rechenansatz
1	Berechne die Größe der um 5 Uhr von Bakterien bedeckten Fläche.	A	Berechne B(11).
2	Berechne die Anzahl der Besucher, die um 11 Uhr auf dem Schulfest sind.	B	Bestimme C´(6) und gib seine Bedeutung an.
3	Zeige, dass der Baum bis 10 Uhr insgesamt etwa 107 l Sauerstoff produziert hat.	C	Bestimme die lokale Maximumstelle von A´ (= Li-Re-Wendestelle von A). Es gilt: A´´(t) = 0 und A´´´(t) < 0
4	Bestimme die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterien in $\frac{cm^2}{h}$ zwischen Beobachtungsbeginn und 5 Uhr.	D	Bestimme die lokale Maximumstelle von A (denn vorher steigt A an.)
5	Bestimme, wie viel O_2 der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich abgibt.	E	Bestimme die lokale Maximumstelle von B´ (= Li-Re-Wendestelle von B). Es gilt: B´´(t) = 0 und B´´´(t) < 0
6	Untersuche, wann der Besucherandrang genauso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.	F	Zeige: C(10) ≈ 107 l.
7	Bestimme die Steigung von C an der Stelle 6. Erläutere die Bedeutung des Wertes im dargestellten Sachzusammenhang.	G	Berechne die lokale Maximumstelle und das lokale Maximum der Ausgangsfunktion B.
8	Untersuche, bis zu welchem Wert im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche wächst.	H	Berechne $\frac{C(17)-C(13)}{17-13}$.
9	Bestimme der Zeitpunkt, an dem der Baum den meisten O_2 produziert. Erläutere, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch bestimmen kann.	I	Berechne den Zeitpunkt t mit B´(t) = B´(7,5).
10	Berechne den Zeitpunkt, an dem die Besucherzahl maximal ist. Bestimme den Maximalwert.	J	Berechne $\frac{A(5)-A(0)}{5-0}$.
11	Ermittle den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.	K	Bestimme die lokale Maximumstelle der Funktion C. Es gilt: C´(t) = 0 und C´´(t) < 0.
12	Bestimme den Zeitpunkt, an dem der größte Besucherandrang besteht.	L	Berechne A(5).

d) **Löse** alle zwölf Aufgabenstellungen und **überprüfe** Deine Ergebnisse am Graphen.

e) **Begründe** für alle Bestandsfunktionen, warum die Modellierung nicht auf den gesamten Definitionsbereich der jeweiligen Funktion ausgedehnt werden kann.

f) **Präsentiert** als Tischgruppe Eure Ergebnisse zu den Aufgaben a) bis e) für eine Bestandsfunktion. Die Präsentation muss von der gesamten Tischgruppe getragen werden.

Lösungen zu den Aufgabenteilen a) und e):

a) Die Zeitachse entspricht der horizontalen t-Achse. Dort markiert man in GRÜN den in den Klammern angegebenen Definitionsbereich sowie den dazugehörigen Grafenabschnitt. Die vertikale Achse gibt den Bestand an. **e)** Da die Bestandsfunktionen alle vom Grad 3 sind und dessen Graphen wegen eines negativen a_3 von links oben nach rechts unten verlaufen, müsste der Bestand irgendwann negativ werden.

Lösungen zu den Aufgabenteilen c) und d):

	Typische Aufgabenstellung		Rechenansatz
1	Berechne die Größe der um 5 Uhr von Bakterien bedeckten Fläche.	L	Berechne A(5). A(5) = 1900 cm²
2	Berechne die Anzahl der Besucher, die um 11 Uhr auf dem Schulfest sind.	A	Berechne B(11). B(11) = 468 Besucher
3	Zeige, dass der Baum bis 10 Uhr insgesamt etwa 107 l Sauerstoff produziert hat.	F	Zeige: C(13) ≈ 107 l . C(10) = $106\frac{2}{3}$ l ≈ 107 l
4	Bestimme die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterien in $\frac{cm^2}{h}$ zwischen Beobachtungsbeginn und 5 Uhr.	J	Berechne $\frac{A(5)-A(0)}{5-0}$. $\frac{1900-400}{5-0} = 300\,\frac{cm^2}{h}$
5	Bestimme, wie viel O_2 der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich abgibt.	H	Berechne $\frac{C(17)-C(13)}{17-13}$. $\frac{524\frac{1}{3}-106\frac{2}{3}}{17-13} = 104\frac{5}{12}\,\frac{l}{h}$
6	Untersuche, wann der Besucherandrang genauso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.	I	Berechne den Zeitpunkt t mit B´(t) = B´(7,5). $B'(t) = -3t^2 + 48t - 117 = 74{,}25 = B'(7{,}5)$ $\Leftrightarrow -3t^2 + 48t - 191{,}25 = 0$ $\Leftrightarrow t = 7{,}5\ (7{:}30)$ oder $t = 8{,}5\ (8{:}30)$
7	Bestimme die Steigung von C an der Stelle 6 und erläutere die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.	B	Bestimme C´(6) und gib seine Bedeutung an. C´(6) = 0 $\frac{l}{h}$ beschreibt die momentane Geschwindigkeit der Sauerstoffabgabe um 6 Uhr.
8	Untersuche, bis zu welchem Wert im vorgegebenen Modell die bedeckte Fläche wächst.	D	Bestimme die lokale Maximumstelle von A (denn vorher steigt A an.) $A'(t) = -24t^2 + 200t = 0 \Leftrightarrow t = 0 < 6;\ t = 8\frac{1}{3}$ A´´($8\frac{1}{3}$) = -380 < 0 . Bis 8:20 wächst die Fläche.
9	Bestimme der Zeitpunkt, an dem der Baum den meisten Sauerstoff produziert. Erläutere, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch bestimmen kann.	K	Bestimme die lokale Maximumstelle der Funktion C: C´(t) = 0 und C´´(t) < 0. $C'(t) = -t^2 + 28t - 132 = 0 \Leftrightarrow t = 6;\ t = 22 > 20$ C´´(6) = 16 > 0: 6 ist lokale Minimumstelle, C´´(22) = -16 < 0: 22 ist lokale Maximumstelle, liegt aber außerhalb des Beobachtungszeitraums, der bis 20 Uhr geht. Der Graph von C steigt ab t = 6 bis t = 20 an. C hat daher bei t = 20 sein Maximum.
10	Berechne die den Zeitpunkt, an dem die Besucherzahl maximal ist, und bestimme den maximalen Wert.	G	Berechne die lokale Maximumstelle und das lokale Maximum der Ausgangsfunktion B. $B'(t) = -3t^2 + 48t - 117 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = 13$ $B''(13) = -30 < 0$: 13 ist lokale Maximumstelle. B(13) = 520 ist das lokale Maximum. Dir größte Besucherzahl beträgt um 13 Uhr 520.
11	Ermittle den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.	C	Bestimme die lokale Maximumstelle von A´, d. h. die Wendestelle von A, A´´(t) = 0 und A´´´(t) < 0 $A''(t) = -48t + 200 = 0 \Leftrightarrow t = 4\frac{1}{6}$; $A'''(4\frac{1}{6}) = -48 < 0$: $4\frac{1}{6}$ ist lokale Maximumstelle von A´ bzw. Wendestelle von A. Die Bakterienkultur wächst am schnellsten um 4:10.
12	Bestimme den Zeitpunkt, an dem der größte Besucherandrang besteht.	E	Bestimme die lokale Maximumstelle von B´, d. h. die Wendestelle von B, B´´(t) = 0 und B´´´(t) < 0 $B''(t) = -6t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 8$; $B'''(8) = -8 < 0$: 6 ist lokale Maximumstelle von B´ bzw. Wendestelle von B. Der Besucherandrang ist um 8:00 am größten.

6 Kontrollaufgaben – Vorbereitung auf die Zentralklausur

Kompetenzraster zu den Kontrollaufgaben

Funktionsuntersuchung ohne Sachkontext

Ich kann …	Die Kompetenzen beziehen sich auf folgende Aufgaben …	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
den Funktionswert berechnen.	1a)				
quadratische Funktionen (auch Scharen) rechnerisch ohne GTR auf Nullstellen untersuchen.	1b), 1m), 1n), 1o), 3b)				
eine Geradengleichung durch 2 Punkte (z. B. Gleichung einer Sekante) bestimmen.	4c), 5a)				
Näherungsverfahren zur Bestimmung der momentanen Steigung an einer Stelle beschreiben.	4d), 5d)				
rechnerisch die Gleichung einer Tangenten an einen Grafen in einem Punkt P bestimmen.	1c)				
eine Gerade in ein Koordinatensystem einzeichnen und als Tangente identifizieren.	1d)				
eine Tangente an den Grafen in einem Punkt P einzeichnen und damit die Ableitung an einer Stelle bestimmen (zeichnerisches Ableiten).	1e)				
eine Tangentensteigung berechnen.	1c), 1e)				
rechnerisch Stellen eines Grafens mit einer bestimmten Steigung berechnen.	5b)				
begründen, ob der Graf einer Funktion und der Graf der Ableitungsfunktion zusammengehören.	1f), 1h)				
den Grafen der Ableitungsfunktion skizzieren.	1g)				
rechnerisch nachweisen, dass bestimmte Punkte (Stellen) lokale Hoch- bzw. Tiefpunkte (Maximum- bzw. Minimumstellen) sind.	1i), 3a)				
lokale Hoch- bzw. Tiefpunkte (Maximum- bzw. Minimumstellen) rechnerisch bestimmen.	1o), 4b)				
Gleichungen für einfach Transformationen angeben und beschreiben.	1j), 1k), 3e), 4e)				
nachweisen, dass sich ein Funktionsterm als transformierter Funktionsterm darstellen lässt.	4f)				
begründend entscheiden, ob Aussagen zum Steigungs- und *Krümmungsverhalten*[12] zutreffen.	3d)				
rechnerisch nachweisen, dass bestimmte Punkte (Stellen) Wendepunkte (Wendestellen) sind.	*1l), 3c)*				
rechnerisch eine Funktion auf ihr Krümmungsverhalten bzw. Wendepunkte untersuchen.	*1o)*				

[12] Die kursiv markierten Aufgaben benötigen Kenntnisse zur zweiten Ableitung

Funktionsuntersuchung mit Sachkontext

Ich kann …	Die Kompetenzen beziehen sich auf folgende Aufgaben …	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
den Bestand, Änderungsraten, Monotonie und Krümmungsverhalten im Sachkontext deuten und die Deutungen ggf. für Problemstellungen nutzen.	2e), 2g), 1a), 6d), 6e), 7c), 7d), 8d)				
den Bestand und momentane Bestandsänderungsraten zu einem bestimmten Zeitpunkt mittels Modellfunktion rechnerisch und durch Ablesung bestimmen.	2a), 2c), 6a), 6e), 7a), 8a), 8b), 8d)				
Zeiträume rechnerisch und durch Ablesung bestimmen, bei denen ein bestimmter Bestand erreicht wird.	7a), 8a)				
mittlere bzw. momentane Änderungsraten unter Zuhilfenahme der Modellfunktion bzw. ihre Ableitungsfunktion berechnen.	2e), 6c), 7c)				
den maximalen Bestand und Bereiche mit zu- bzw. abnehmenden Bestand unter Zuhilfenahme notwendiger und hinreichender Bedingungen für Extrema sowie Randwertvergleich bestimmen.	2d), 6b), 7b), 8c)				
die maximale Änderung des Bestands und Bereiche mit zu- bzw. abnehmender Bestandsänderung unter Zuhilfenahme notwendiger und hinreichender Bedingungen für Wendestellen sowie Randwertvergleich bestimmen.	*2f), 6d)*				
im Grafen Bereich mit Links- und Rechtskrümmung markieren und im Sachkontext deuten.	*2g)*				
Grafen von transformierten Bestandsfunktionen skizzieren und dazu eine passende Modellfunktion angeben.	2h), 7d), 8e)				
begründen, wie sich eine Bestandsänderung auf den Bestand auswirkt.	2b), 2h)				
Modellfunktionen für Sachprobleme ermitteln.	6e)				

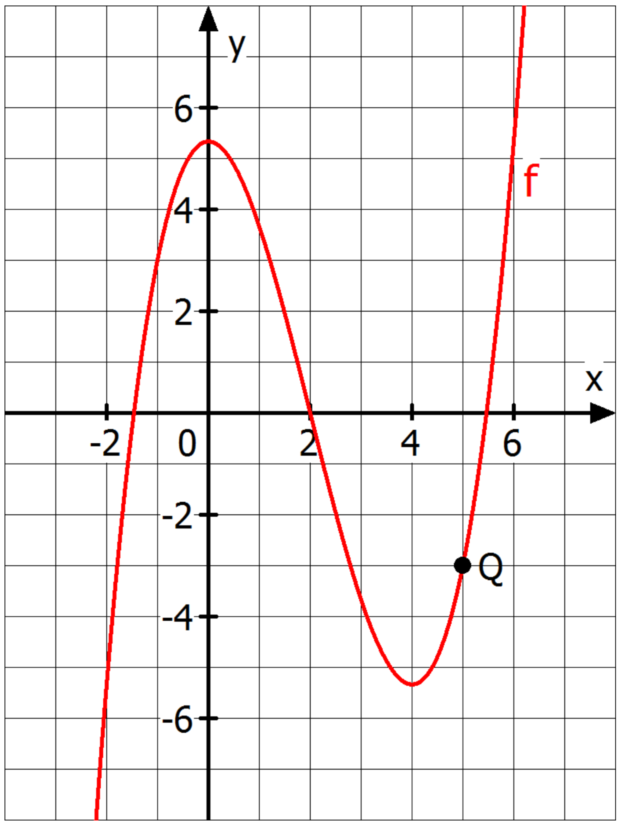
Nutzung des GTR

Ich kann …	Die Kompetenzen beziehen sich auf folgende Aufgaben …	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
mithilfe des GTR Nullstellen GRF bestimmen bzw. Polynomgleichungen lösen (über MENU 5 oder MENU A).	4a), 4b), 5b)				
mithilfe des GTR einen Grafen einer Funktion skizzieren und zeichnen (Menu 5).	5c), 7d), 8e)				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Funktionsuntersuchung ohne Sachkontext[13]

Die unten befindliche Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + \frac{16}{3}$.



a) **Zeige** mithilfe des Funktionsterms f(x), dass 2 eine Nullstelle von f ist.

b) Die Funktion f kann faktorisiert werden durch $f(x) = (x - 2) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x - \frac{8}{3}\right)$.

   Bestimme mit der faktorisierten Form alle Nullstellen von f und **gib** den exakten Abstand der drei Nullstellen **an**.

c) **Bestimme** eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P (2/0).

d) **Untersuche** mit einer Zeichnung, ob die Gerade g mit $g(x) = -\frac{4}{3} \cdot x + 1$ Tangente an den Graphen von f ist.

e) **Zeichne** in Q(5/-3) eine Tangente an den Graphen von f **ein** und **bestimme** damit näherungsweise f´(5).

   Überprüfe die Näherung durch eine Rechnung.

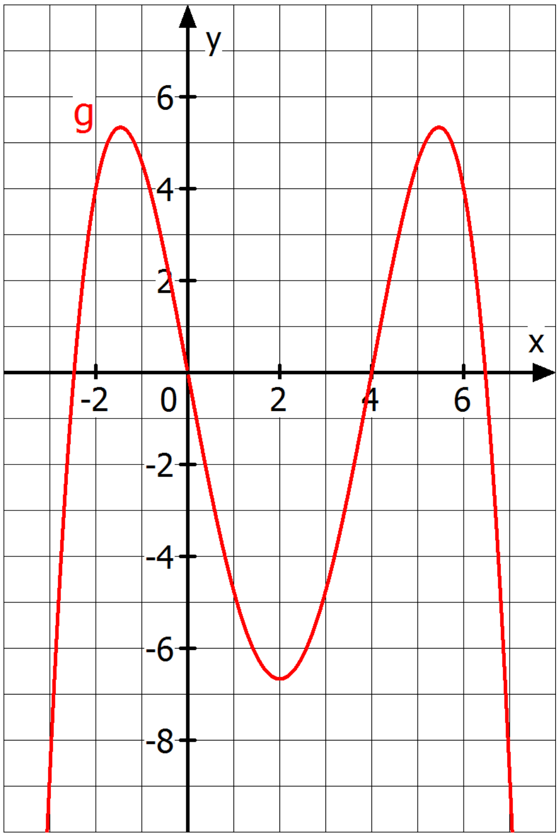
f) **Entscheide** unter der Angabe einer geeigneten Begründung, ob der Graph der Ableitungsfunktion eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.

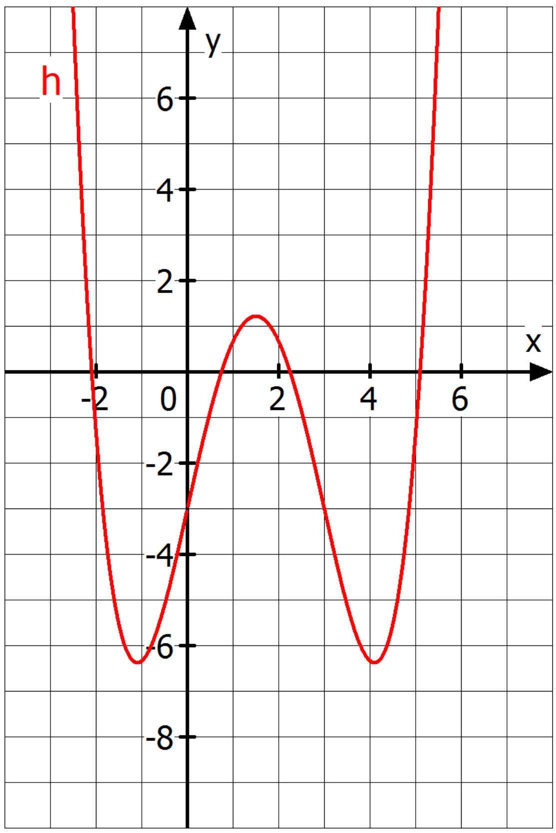
[13] Diese Aufgabe wurde vom Ministerium zur Vorbereitung auf die NRW-Zentralklausur in der E-Phase 2015 vorgelegt und durch die Aufgabenteile c) bis h) ergänzt (Bearbeitungsdauer: ca. 45 Minuten).

g) **Skizziere** den Graphen von f´ in die obige Abbildung.

h) Für eine Funktion F gilt F´(x) = f(x).

Begründe unter Angabe von einem Gegenargument, dass die folgenden Grafen zu den Funktionen g und h nicht den Graphen von F darstellt.





i) **Zeige** rechnerisch, dass 0 eine lokale Maximum- und ein 4 lokale Minimumstelle von f ist.

j) $H(0/\frac{16}{3})$ und $T(4/-\frac{16}{3})$ sind die beiden lokalen Extrempunkte des Graphen.

Gib alle Werte für d **an**, so dass Funktion h_d mit der Gleichung $h_d(x) = f(x) + d$ genau zwei Nullstellen besitzt.

Begründe Deine Angabe.

k) Gegeben ist eine Funktion i_c mit der Gleichung $i_c(x) = f(x-c)$.

(1) **Gib an**, wie sich der Graph von i_c verändert, wenn man immer größere Zahlen für c einsetzt.
(2) **Nenne** einen Wert für c, so dass der Ursprung eine Nullstelle von i_c ist.
(3) **Begründe** mit der faktorisierten Darstellung aus Aufgabe b), dass der Graph zu i_{-2} punktsymmetrisch zum Ursprung ist. (Expertenaufgabe)

l) **Weise nach**, dass P (2/0) ein Rechts-Links-Wendepunkt des Graphen von f ist.

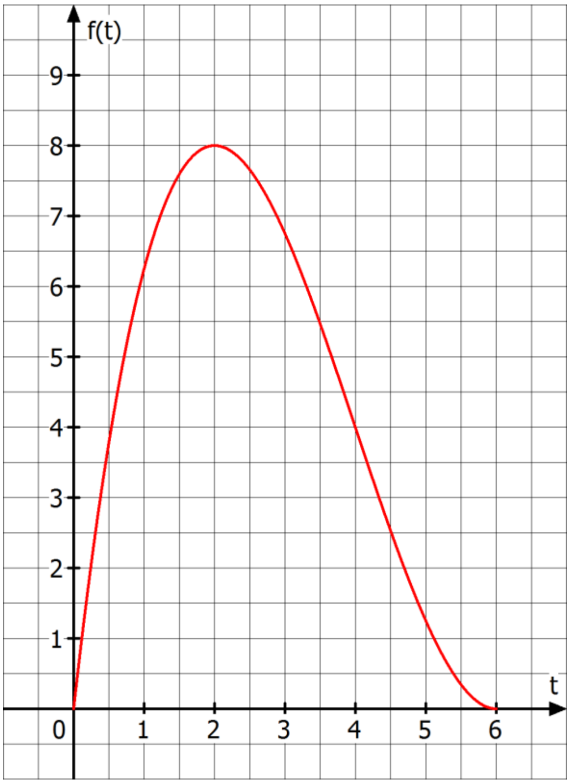
m) **Berechne** alle Nullstellen der Funktion u mit $u(x) = -x^2 + 6x - 5$.

n) **Untersuche** für welche a-Werte die Funktion v_a mit $v_a(x) = -x^2 + 6x + a$ keine Nullstellen hat.

o) **Untersuche** die Funktion v mit $v(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16x - 2$ auf Extrem- und Wendestellen.

Aufgabe 2: Funktionsuntersuchung im Sachkontext[14]

Die Funktion f mit der dazugehörigen Funktionsgleichung $\mathbf{f(t) = \frac{1}{4} \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 9 \cdot t}$ beschreibt näherungsweise die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze in der Einheit cm pro Woche. Dabei gibt t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt: $0 \le t \le 6$. Der Graph der Funktion f ist in der Abbildung rechts dargestellt.



a) **Berechne** die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze nach 2 Wochen.

b) Nimm an, die Pflanze hätte nach vier Wochen eine Höhe von 70 cm.

Entscheide, welche der drei nachfolgenden Aussagen stimmt. **Kreuze** dazu auf dem Arbeitsblatt an. **Begründe** Deine Entscheidung.

Nach fünf Wochen ist die Pflanze

O kleiner als 74 cm oder
O gleich 74 cm oder
O größer als 74 cm.

c) **Begründe** anhand des Funktionsterms, dass die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums Null ist.

d) **Zeige**, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach 2 Wochen maximal ist.

e) **Berechne** $\mathbf{\frac{f(1)-f(0)}{1-0}}$ und $\mathbf{f'(1)}$ und **deute** die Werte im Sachzusammenhang.

f) **Weise nach**, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen am schnellsten abnimmt und zu Beginn am schnellsten zunimmt.

g) **Markiere** im Graphen die Bereiche, für die $f' > 0$ und $f'' > 0$ gilt. **Interpretiere** die Bereiche im Sachkontext.

h) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit einer zweiten Pflanze in cm pro Woche. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

(1) Bei $t = 0$ und $t = 6$ beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit 0 cm pro Woche.
(2) Bei $t = 2$ beträgt die maximale Wachstumsgeschwindigkeit 2 cm pro Woche.

Skizziere den Graphen von g und **gib** eine Funktionsgleichung für g **an**.

Begründe, dass der Längenzuwachs der ersten Pflanze in cm für jedes $0 \le t \le 6$ nach t Wochen viermal so groß ist wie bei der zweiten Pflanze.

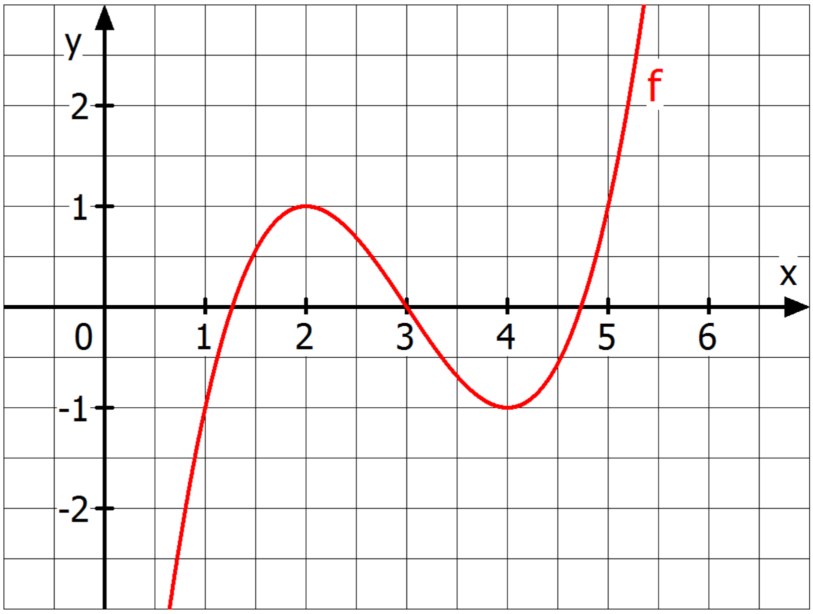
---

[14] Diese Aufgabe wurde vom Ministerium zur Vorbereitung auf die NRW-Zentralklausur in der E-Phase 2015 vorgelegt und durch die Aufgabenteile c) bis h) ergänzt (Bearbeitungsdauer: ca. 45 Minuten).

Teil II: Aufgaben unter Nutzung des GTR

Aufgabe 3: Innermathematische Aufgabe aus der Zentralklausur 2010[15]

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9$. Die folgende Abbildung zeigt den Grafen von f.



a) **Weise** rechnerisch **nach**, dass der Graf von f im Punkt H(2/1) einen lokalen Hochpunkt und im Punkt T(4/-1) einen lokalen Tiefpunkt besitzt.

b) Die Funktion f lässt sich auch in der folgenden Form darstellen: $f(x) = (x - 3) \cdot (0{,}5x^2 - 3x + 3)$

Ermittle alle Nullstelen von f und **gib** diese nicht als Näherungswerte, sondern exakt **an**.

c) **Zeige**, dass der Graf von f den Wendepunkt W(3/0) besitzt.

d) **Entscheide** begründend, ob die Aussagen A bis C jeweils wahr oder falsch sind:

A Die Steigung der Geraden durch die Punkte T(4/-1) und A(6/f(6)) beträgt 5.

B Der Graf der Ableitungsfunktion f´ fällt für $x > 3$ streng monoton.

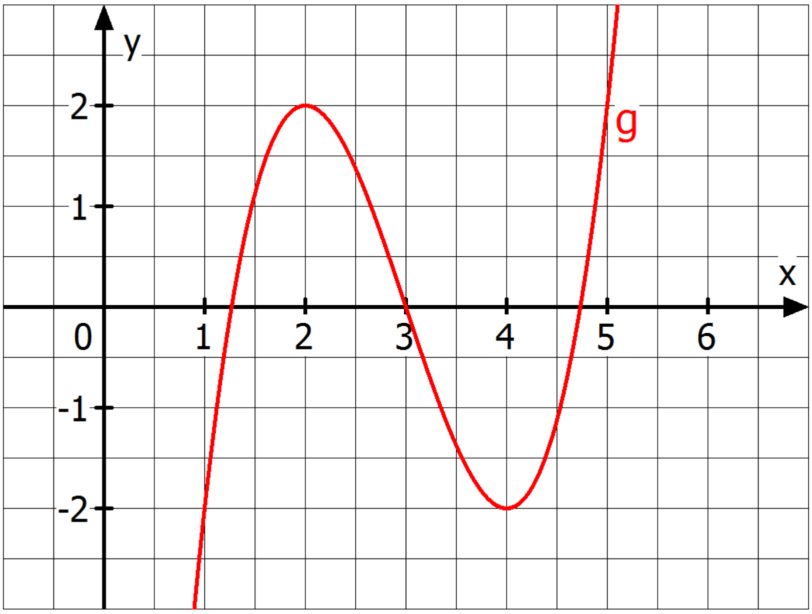
C Die Funktionswerte der Ableitung von f sind nie kleiner als – 1,5.

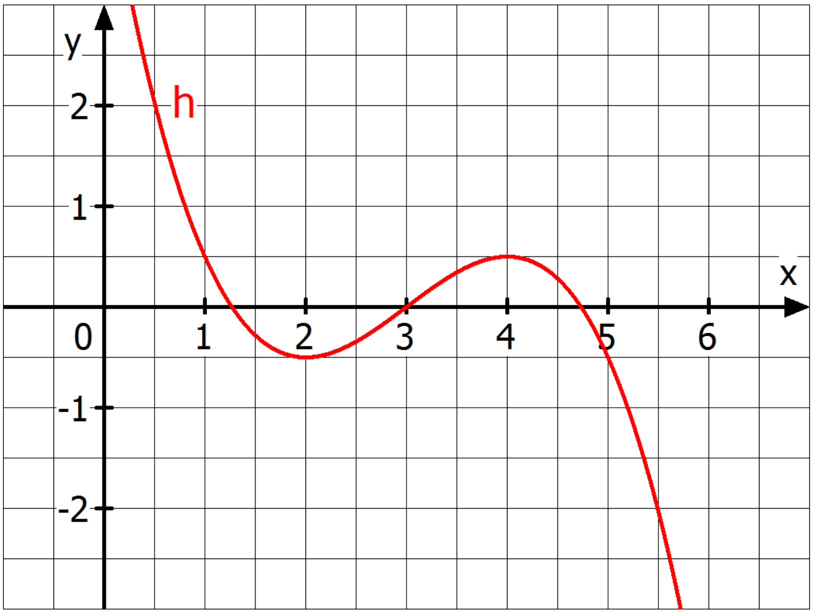
e) Der Graf der Funktion f wird drei einfachen Veränderungen unterzogen. Dabei entstehen jeweils die Graphen zu g, h und k (vgl. Abbildungen auf der nächsten Seite).

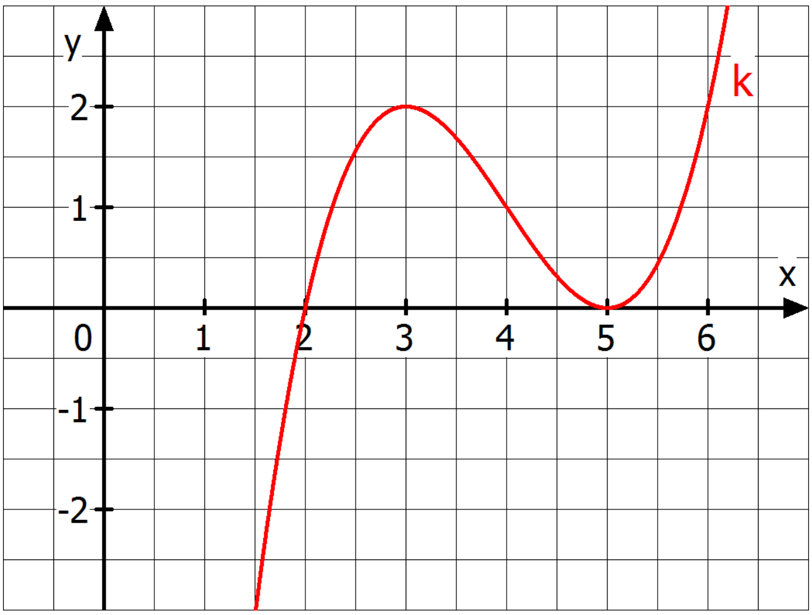
(1) **Beschreibe**, wie die Grafen von g, h und k jeweils aus dem Grafen von f hervorgehen.

(2) **Gib** jeweils eine Funktionsgleichung **an**.

[15] Modifiziert nach der Zentralklausur NRW aus dem Jahr 2010 unter Einbeziehung der zweiten Ableitung und dem Krümmungsverhalten von Grafen (Bearbeitungszeit: 55 Minuten)

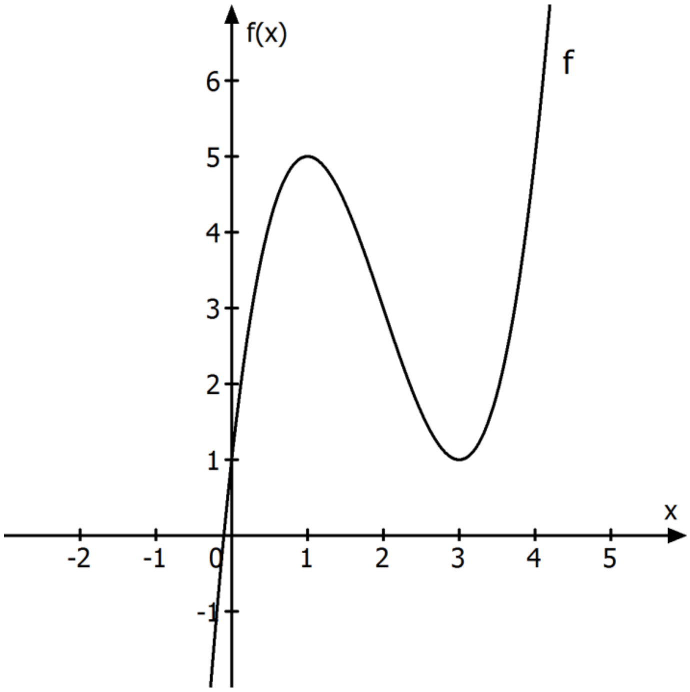

y
2
1
0
-1
-2
x
1
2
3
4
5
6
g


y
2
1
0
-1
-2
x
1
2
3
4
5
6
h


y
2
1
0
-1
-2
x
1
2
3
4
5
6
k

Aufgabe 4: Innermathematische Aufgabe aus der Zentralklausur 2015[16]

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f.



a) **Ermittle** auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.

b) **Ermittle rechnerisch** den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Grafen von f.

c) **Zeichne** in die Abbildung die Sekante s durch die Punkte P(2/3) und Q(3/1) ein und **ermittle** rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante s.

d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion f in einem Referat erklären, wie deren Ableitung f´(a) an einer Stelle a näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine Tabelle angelegt.

Term	$\frac{f(2{,}4)-3}{2{,}4-2}$	$\frac{f(2{,}3)-3}{2{,}3-2}$	$\frac{f(2{,}2)-3}{2{,}2-2}$	$\frac{f(2{,}1)-3}{2{,}1-2}$
Wert	-2,84	-2,91	-2,96	-2,99

Gib an, um welche Stelle a es sich handelt und **erkläre**, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung f´(a) nähern.

e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$.

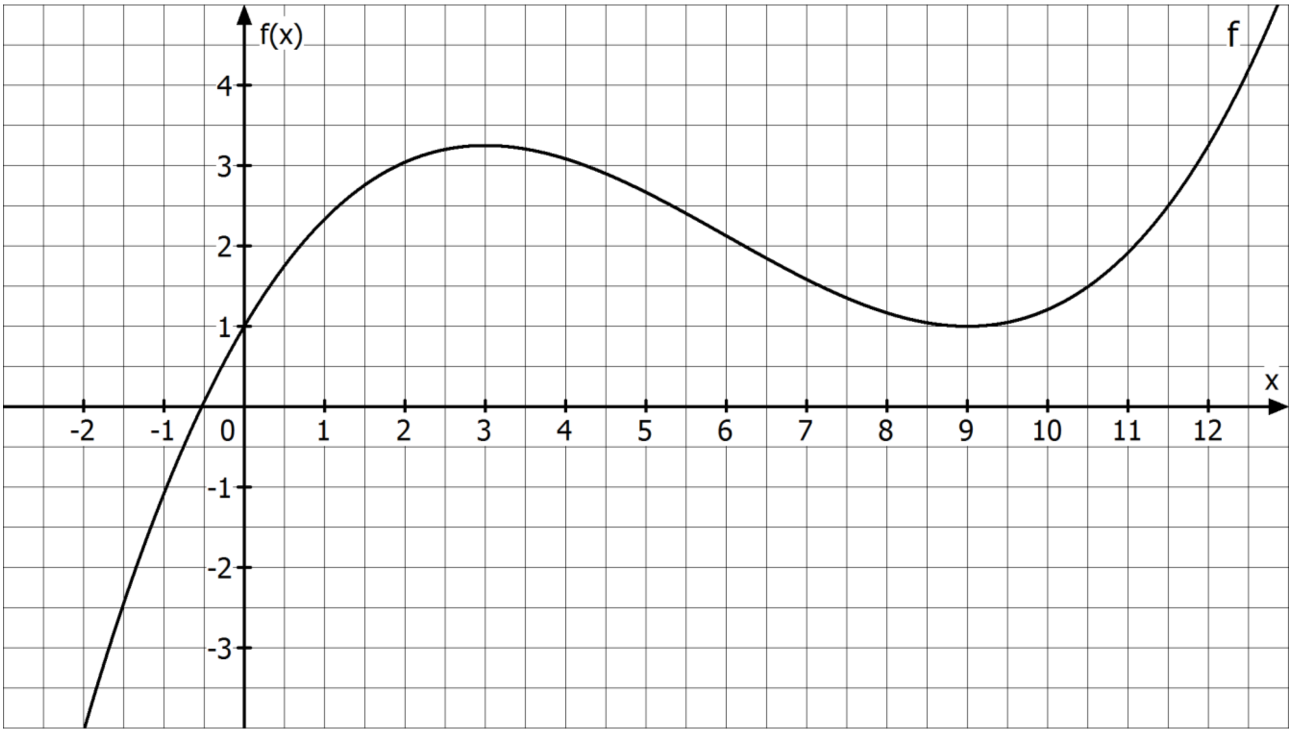
Ermittle, durch welche Transformationen der Graf von g aus dem Grafen von f hervorgeht. **Beschreibe** Dein Vorgehen.

f) **Beweise,** dass gilt: $g(x) = f(x + 1) + 3$.[17]

[16] Modifiziert nach der Zentralklausur NRW aus dem Jahr 2015 (Bearbeitungszeit: 40 Minuten)
[17] Zusatzaufgabe (5 Minuten)

Aufgabe 5: Innermathematische Aufgabe aus der Zentralklausur 2016[18]

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{27}{16}x + 1$. Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f.



a) **Ermittle** rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte $H(3/\frac{13}{4})$ und $T(9/1)$.

[Zwischenergebnis: Die Gerade s hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.])

b) Es gibt zwei stellen, an denen der Graf von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen.

Ermittle diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

c) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{13}{4}$.

(1) **Zeichne** den Grafen von g in die obige Abbildung **ein**.

(2) Der Graf von g geht durch Transformation aus dem Grafen von f hervor.

Gib diese Transformation und eine Funktionsgleichung von g **an**.

d) Die folgenden Abbildungen A bis D auf der nächsten Seite veranschaulichen, wie man die Ableitung f´(2) näherungsweise bestimmen kann.

(1) **Gib an**, welche Abbildung zum Differenzenquotient $\frac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$ gehört.

(2) **Gib an,** welche geometrische Bedeutung der Wert f´(2) hat.

(3) **Erkläre,** warum in den Abbildungen A bis E veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

---

[18] Modifiziert nach der Zentralklausur NRW aus dem Jahr 2016 (Bearbeitungszeit: 40 Minuten)

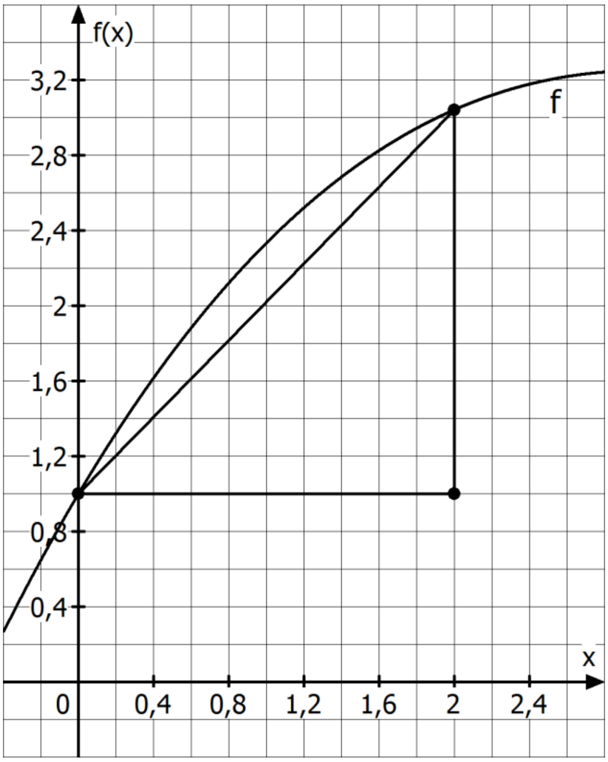


Abbildung A

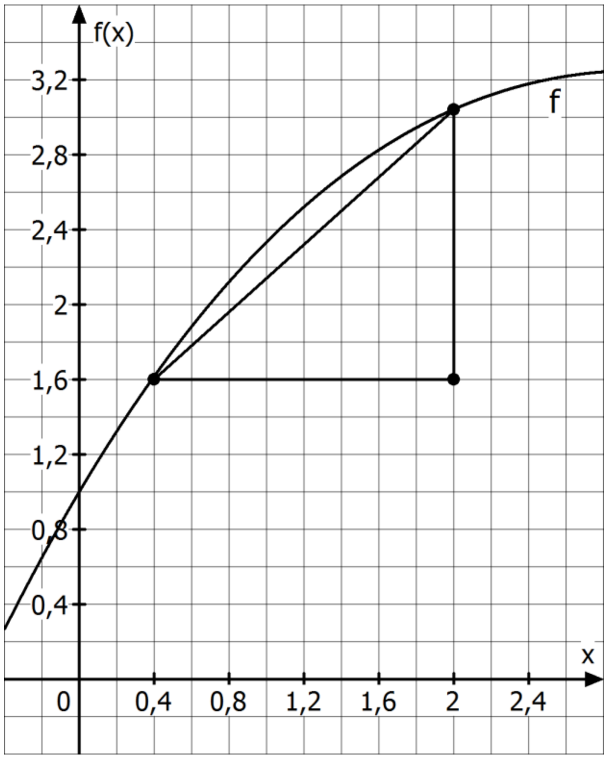


Abbildung B

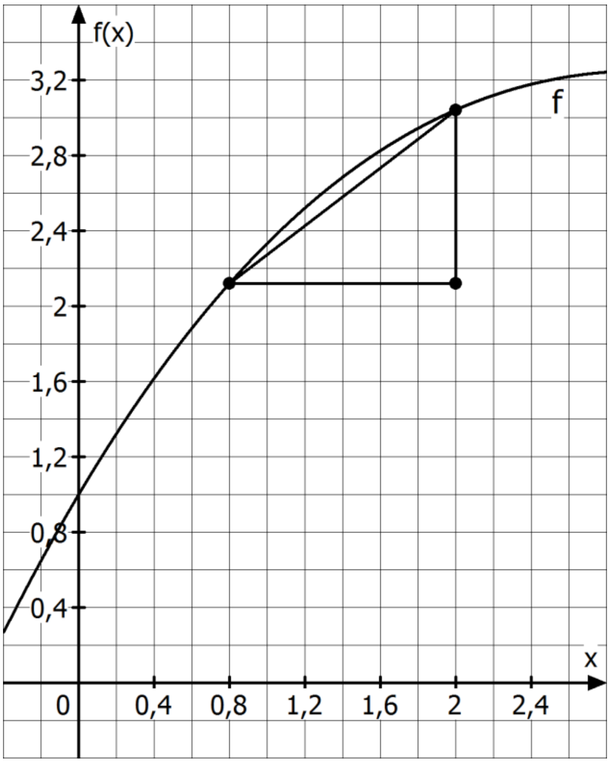


Abbildung C

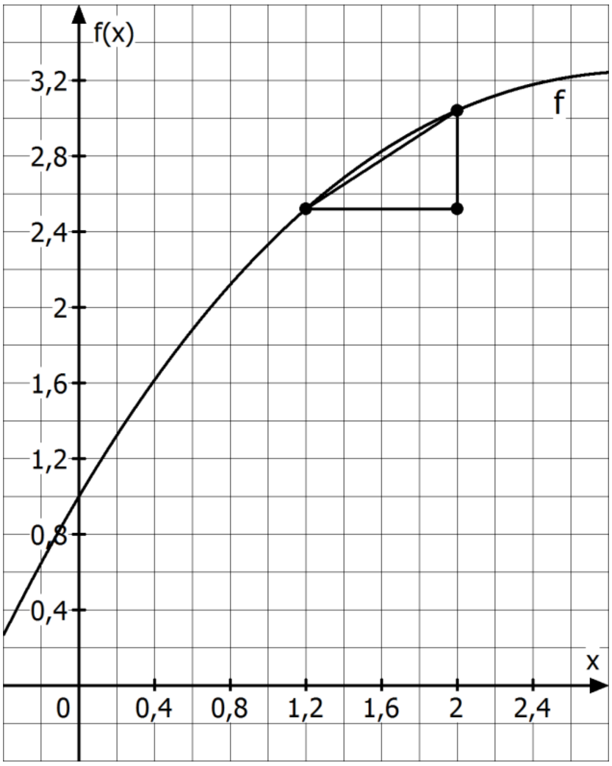
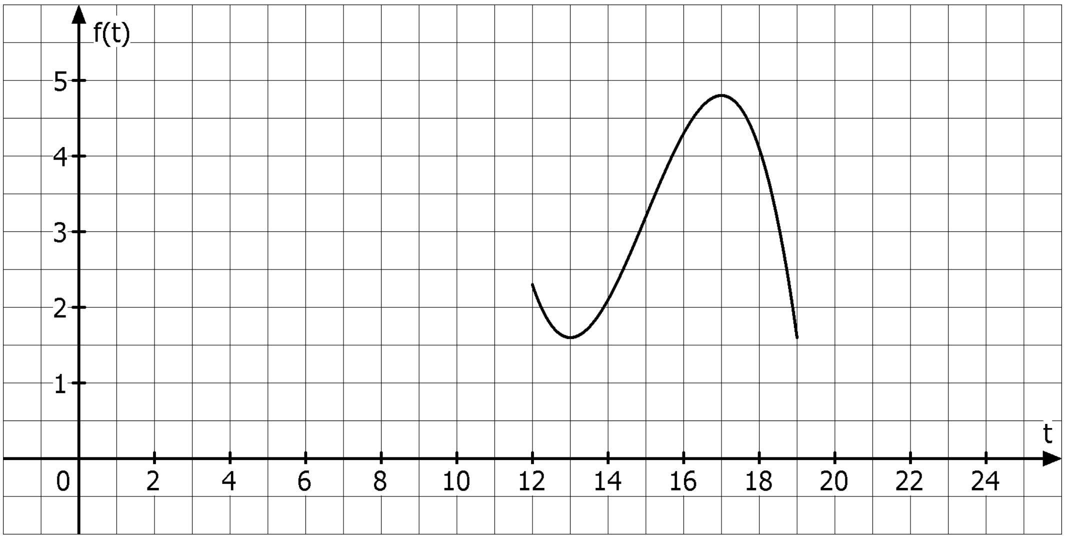


Abbildung D

Aufgabe 6: Kontextgebundene Aufgabe aus der Zentralklausur 2014[19]

An einer Autobahnbaustelle wurde über einen längeren Zeitraum die Stauentwicklung untersucht. Für $12 \leq t \leq 19$ stellt der Graph der Funktion f modellhaft die Staulänge während eines bestimmten Tages in der Zeit von 12:00 Uhr bis 19:00 Uhr dar (siehe Abbildung).



Es gilt: $f(t) = -0{,}1 \cdot t^3 + 4{,}5 \cdot t^2 - 66{,}3 \cdot t + 322{,}7$. Dabei ist t die Uhrzeit (z. B. 14:00 Uhr entspricht t = 14) und f (t) die Staulänge zum Zeitpunkt t in Kilometern. Mit dieser Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) **Berechne** die Länge des Staus um 13:00 Uhr.

Um abzuschätzen, wie viele Fahrzeuge um 13:00 Uhr im Stau stehen, müssen Annahmen getroffen werden.

Berechne mit Hilfe von zwei plausiblen Annahmen einen Schätzwert für die Anzahl der Fahrzeuge, die um 13:00 Uhr in diesem Stau stehen.

b) **Ermittle** rechnerisch die Uhrzeit, zu der die Staulänge im betrachteten Zeitraum maximal ist, und **gib** die maximale Länge des Staus an.

c) **Bestimme**, um wie viele Kilometer die Staulänge in der Zeit von 13:00 Uhr bis 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt zunimmt.

d) Für die Funktion f gelten für $15 < t < 17$ die beiden Ungleichungen: $f'(t) > 0$ und $f''(t) < 0$.

Interpretiere, welche Bedeutung diese beiden Ungleichungen im Sachkontext haben.

Berechne den Zeitpunkt, bei dem die Staulänge am schnellsten zu- und abnimmt.

e) Es kann davon ausgegangen werden, dass sich der Stau ab 19:00 Uhr gleichmäßig um 3,6 Kilometer pro Stunde verringert.

Bestimme die Uhrzeit, zu der sich der Stau vollständig aufgelöst hat.

Die Staulänge ab 19:00 Uhr soll mit einer geeigneten Funktion g modelliert werden.

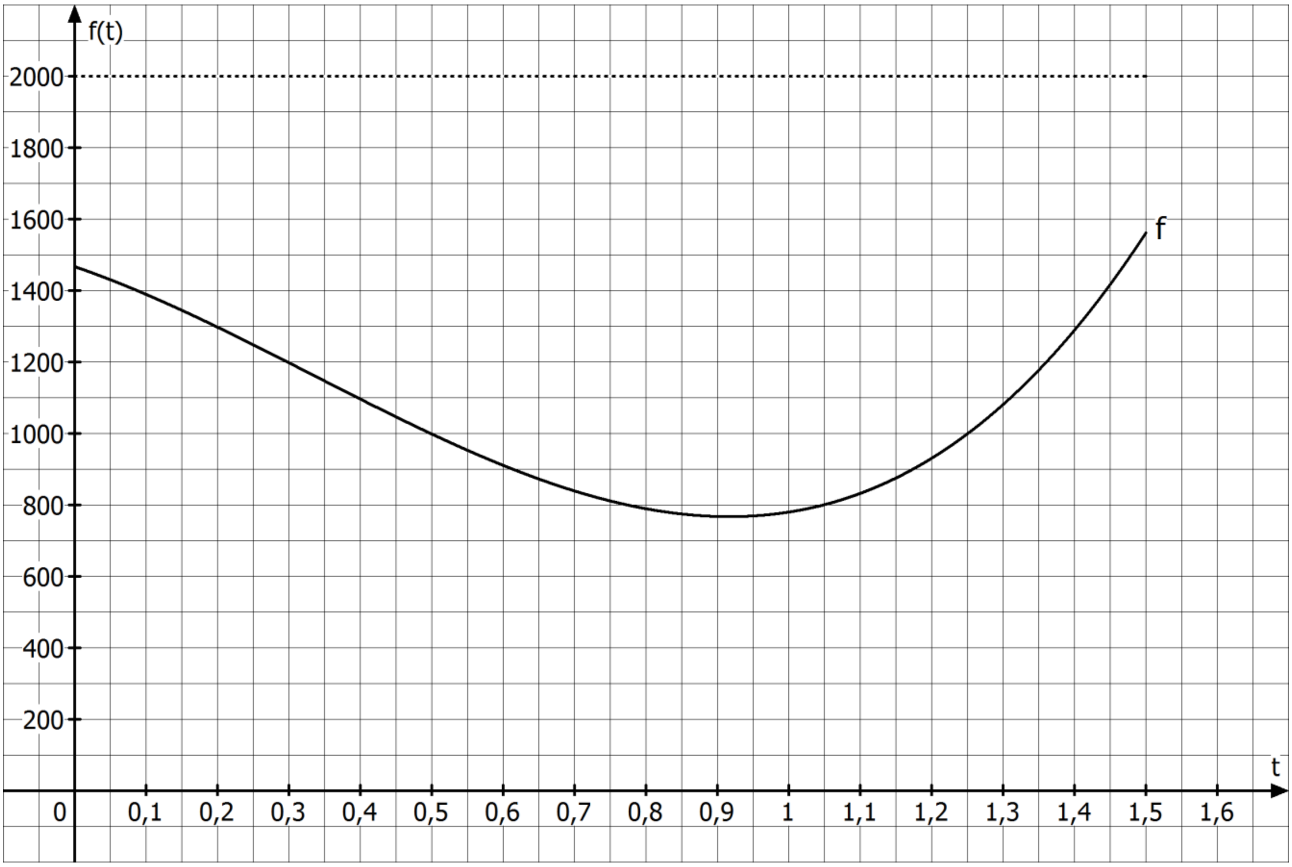
Ermittle eine Funktionsgleichung der Funktion g.

---

[19] Diese leicht modifizierte Aufgabe stammt aus der zentralen Vergleichsklausur des Jahres 2014 und berücksichtigt Überlegungen zur zweiten Ableitung (Bearbeitungsdauer: ca. 50 Minuten).

Aufgabe 7: Kontextbezogene Aufgabe aus der Zentralklausur 2015[20]

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden. Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden. Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1000 m^3 Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt 2000 m^3. Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für $0 \leq t \leq 1{,}5$ durch die Funktion f mit der folgenden Gleichung modelliert: $f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und die Wassermenge im Speicher des Turmes in m^3. Der Graph der Funktion f ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) **Zeige**, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m^3 Wasser im Speicher des Turms sind.

   Ermittle näherungsweise Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert liegt.

b) **Berechne** den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.

   Untersuche, um wie viel m^3 Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

c) **Berechne** $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ und $f'(1)$ und **interpretiere** die Werte im Sachzusammenhang.

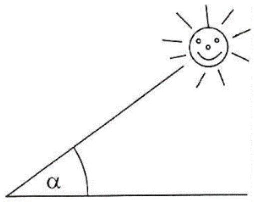
d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533$.

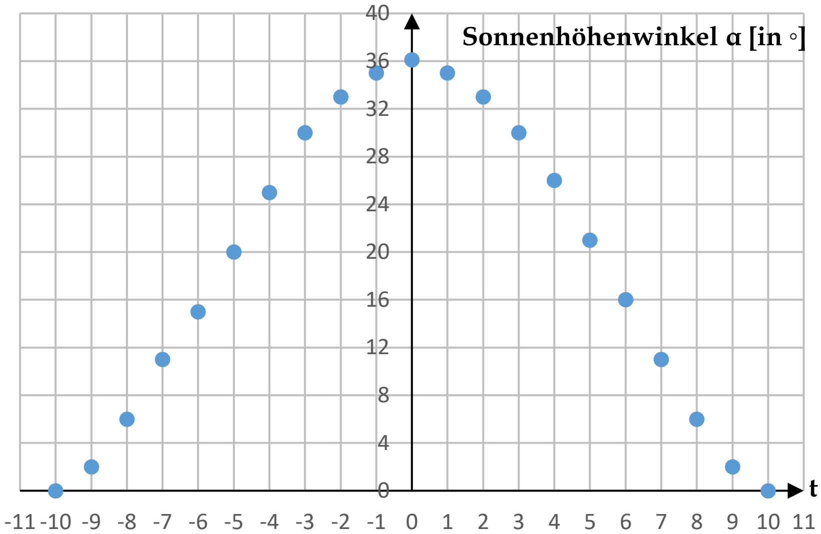
   Zeichne den Graphen von g in die obige Abbildung ein und **erkläre**, welche Bedeutung die Funktionswerte g(t) mit $0 \leq t \leq 1{,}5$ im Sachkotext haben.

[20] Die Aufgabe wurde im Rahmen der zentralen Klausur der E-Phase im Jahr 2015 gestellt und benötigt keine Überlegungen zur zweiten Ableitung (Bearbeitungsdauer: ca. 40 Minuten).

Aufgabe 8: Kontextbezogene Aufgabe aus der Zentralklausur 2016[21]

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel α (vgl. Abb. rechts), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht. Heinz trägt seine Winkelmessung in ein Koordinatensystem ein (vgl. Abb. unten). Dabei entspricht t = 0 der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags, t = 1 entspricht 13:00 Uhr und t = -1 11:00 Uhr usw.





a) **Gib** den Sonnenhöhenwinkel **an**, den Heinz um 7 Uhr morgens misst und **nenne** den Zeitraum, in dem die gemessenen Sonnenhöhenwinkel mindestens 30 Grad betragen.

Heinz modelliert den Sonnenhöhenwinkel für den Zeitraum -10 ≤ t ≤ 10 mit einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit der Gleichung $f(t) = 0{,}0031t^4 - 0{,}671t^2 + 36{,}1$. f(t) beschreibt den Sonnenscheinwinkel in Grad zu der durch t gegeben Uhrzeit.

b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f ergeben, weichen etwas von den Werten aus der obigen Abbildung ab.

Berechne die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.

c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags.

Weise rechnerisch **nach**, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne zu diesem Zeitpunkt seinen höchsten Stand erreicht.

d) (1) **Weise** rechnerisch **nach**, dass gilt: $f'(-9) > f'(-2)$.
(2) **Interpretiere** diese Ungleichung im Sachkontext.

e) An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 4:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion modellieren.

(1) **Skizziere** in die obige Abbildung den Verlauf eines möglichen Grafen von g.
(2) **Ermittle** für einen Ansatz g(t) = a · f(b · t) zu seiner Messung passende Werte für a und b.

---

[21] Die Aufgabe stammt aus der zentralen Klausur des Jahres 2016 (Bearbeitungsdauer: ca. 40 Minuten).

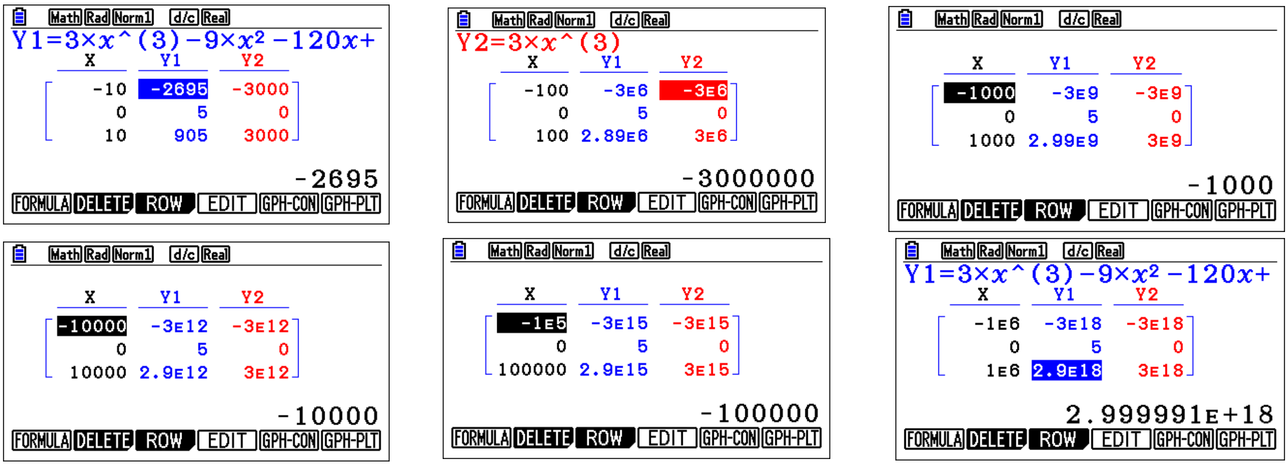
Lösungen

1 Ganzrationale Funktionen – Verhalten an den Rändern und nahe Null

1a) Graph 1 gehört zu Funktionsgleichung f(x), Graph 2 zu h(x) und j(x) sowie Graph 3 zu g(x) und i(x). Argumente könnten sein: Graph 1 und Graph 2 schneiden die y-Achse bei y = 3, so dass g für beide Graphen auszuschließen ist wegen g(0) = 1,5. Daher gehört Graph 3 zu g. Da Graph 1 nicht der Graph einer Funktion zweiten Grades sein kann (darf nur einen Scheitelpunkt besitzen), ist die Zuordnung klar. Anhand der Darstellungen i und j lassen sich die Nullstellen ablesen. Daher gehört i zu Graph 3 und j zu Graph 2.

1b) Graph 1 hat den Grad 4, Graph 2 den Grad 2 und Graph 3 den Grad 3. Die absoluten Glieder lauten 3 (Graph 1 und 2) und 1,5 (Graph 3). Durch Ausmultiplizieren ergibt sich für i(x) und j(x): $\mathrm{i(x)} = -\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) = -\frac{1}{4}(x+3)(x^2-x-2) = -\frac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6) = -0{,}25x^3 - 0{,}5x^2 + 1{,}25x + 1{,}5 = \mathrm{g(x)}$ und $\mathrm{j(x)} = -(x+1)(x-3) = -(x^2-2x-3\,) = -x^2+2x+3 = \mathrm{h(x)}$

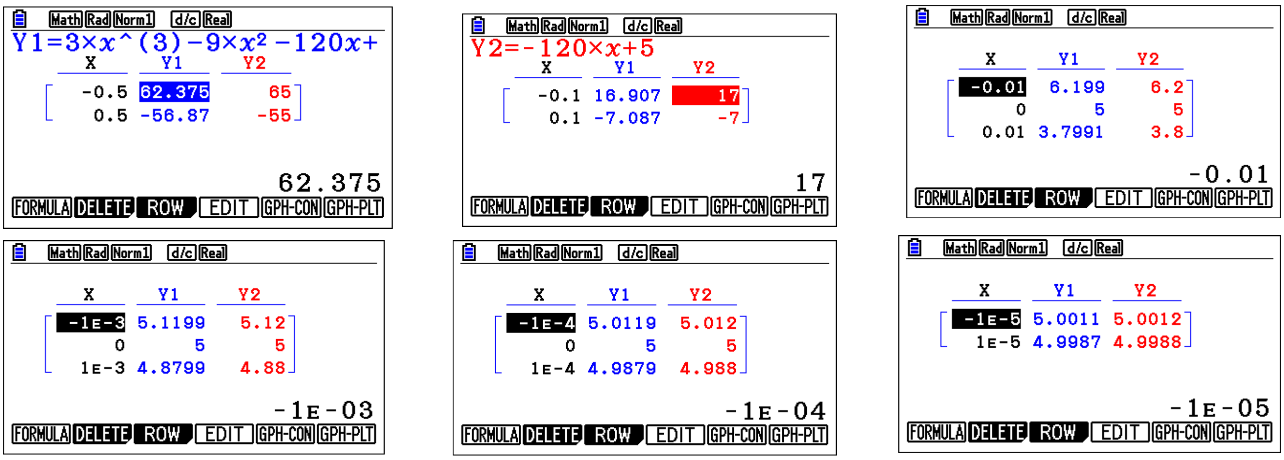
2a) Y1 entspricht f und Y2 g (im MENU 7 wird der Darstellungsbereich durch SET eingestellt).



2b) Für betragsmäßig große Werte für x nähern sich f(x) und g(x) immer weiter an. In unserem Fall für negative Werte von x schneller als für positive Werte von x. Der Graph von f kann an den Rändern durch den Graphen von g angenähert werden.

2c) Man faktorisiert $3x^3$, indem man innerhalb der Klammer jeden Summanden von f(x) durch $3x^3$ dividiert: $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5 = 3x^3 \cdot \left(\frac{3x^3}{3x^3} - \frac{9x^2}{3x^3} - \frac{120x}{3x^3} + \frac{5}{3x^3}\right) = 3x^3 \cdot \left(1 - \frac{9}{3x} - \frac{120}{3x^2} + \frac{5}{3x^3}\right)$. Innerhalb der Klammer streben für betragsmäßig große Werte von x die Brüche hinter der 1 alle gegen Null. Daher bleibt für hinreichend große x nur noch die 1 stehen. Also gilt $f(x) \approx g(x)$ für $x \to \pm\infty$.

3a) Y1 entspricht f und Y2 h (im MENU 7 wird der Darstellungsbereich durch SET eingestellt).



3b) Für betragsmäßig kleine Werte für x nähern sich f(x) und h(x) immer weiter an. Der Graph der Funktion f kann nahe Null durch den Graphen von h beschrieben werden.

3c) Man faktorisiert $-120x$, indem man innerhalb der Klammer jeden Summanden von f(x) durch $-120x$ dividiert. Die 5 wird nicht mit faktorisiert. Es gilt daher für f(x):
$f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 120x + 5 = -120x \cdot \left(\frac{3x^3}{-120x} - \frac{9x^2}{-120x} - \frac{120x}{-120x}\right) + 5 = -120x \cdot \left(-\frac{3x^2}{120} + \frac{9x}{120} + 1\right) + 5.$
Innerhalb der Klammer streben für betragsmäßig kleine Werte von x die Brüche vor der 1 alle gegen Null. Daher bleibt innerhalb der Klammer für hinreichend kleine x nur noch die 1 stehen. Also gilt $f(x) \approx g(x)$ für x nahe Null.

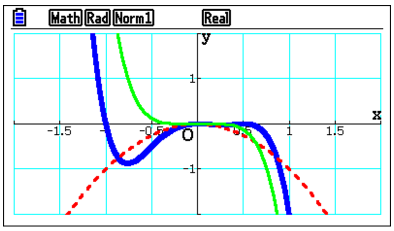
4a)

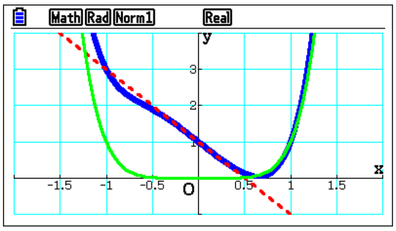
(1) $f(x) = 3x^3 - 4x^5 - x^2 = -4x^5 + 3x^3 - x^2$ hat den Grad 5, $a_0 = 0$. Für betragsmäßig große Werte von x kann f durch $g(x) = -4x^5$ beschrieben werden. Der Graph verläuft also von rechts oben nach links unten. Für x nahe Null lautet die Näherungsfunktion $h(x) = -x^2$. Der Graph von f schmiegt sich in der Nähe der y-Achse einer nach unten geöffneten Normalparabel an.

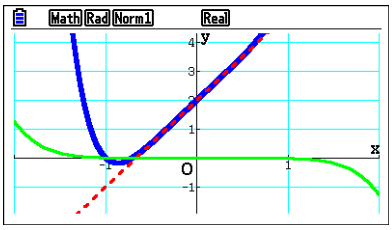
(2) $f(x) = 1 - 2x + x^6 + x^3 = x^6 + x^3 - 2x + 1$ hat den Grad $n = 6$, a_0 ist 1 und f besitzt die Näherungsfunktionen $g(x) = x^6$ und $h(x) = -2x + 1$. Daher verläuft der Graph von f wie der Graph von g von rechts oben nach links oben und näher sich nahe Null der Geraden $y = -2x + 1$ an.

(3) $f(x) = 3x - 0{,}01x^7 + x^6 + 2 = -0{,}01x^7 + x^6 + 3x + 2$ hat den Grad 7 und besitzt das absolute Glied 2. Die Näherungsfunktionen lauten: $g(x) = -0{,}01x^7$ und $h(x) = 3x + 2$. Der Graph von f verläuft wie der Graph von g von links oben nach rechts unten und schmiegt sich nahe Null der Geraden $y = 3x + 2$ an.

4b) Blau (Fett) f: Grün (normal): g, Rot (gestrichelt): h (Links (1); Mitte: (2); Rechts: (3))







5

Zuordnungen:

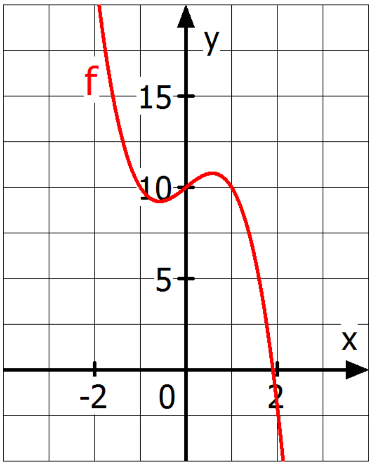
1 → k (gerader Grad, da Graph von links oben nach rechts oben verläuft⇒ g, j oder k, Näherungsfunktion nahe Null ist fallende Gerade ⇒ k)

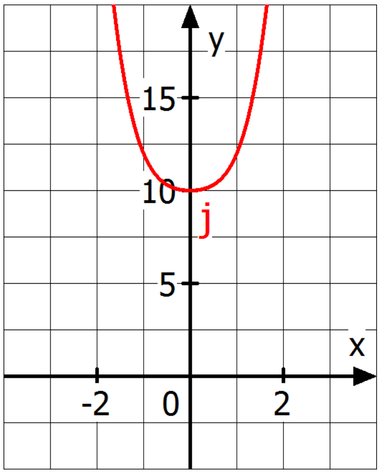
2 → g (gerader Grad, da Graph von links oben nach rechts oben verläuft⇒ g, j oder k, Näherungsfunktion nahe Null ist nach unten geöffnete Normalparabel ⇒ g)

3 → i (ungerader Grad, da Graph von links oben nach rechts unten verläuft ⇒ f, h oder i, Näherungsfunktion nahe Null ist eine fallende Gerade ⇒ i)

4 → h (ungerader Grad, da Graph von links oben nach rechts unten verläuft ⇒ f, h oder i, Näherungsfunktion nahe Null ist keine fallende bzw. steigende Gerade, sondern eine nach unten geöffnete Parabel ⇒ h)

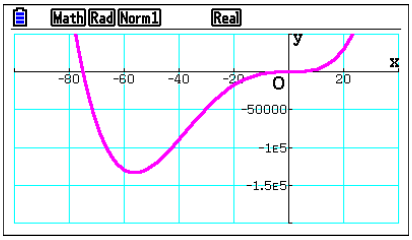
Graphen zu f und j:

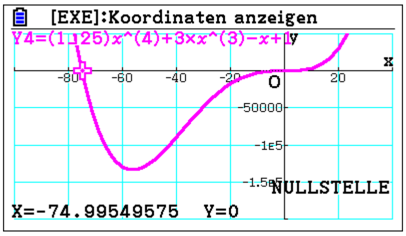


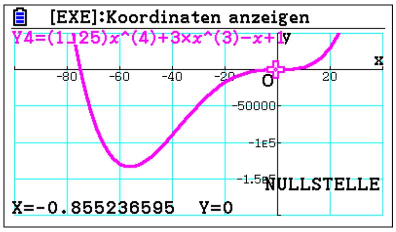


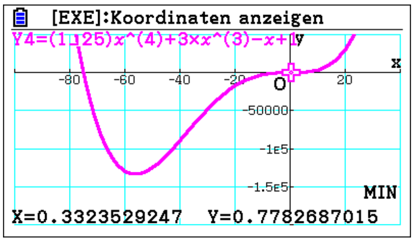
6

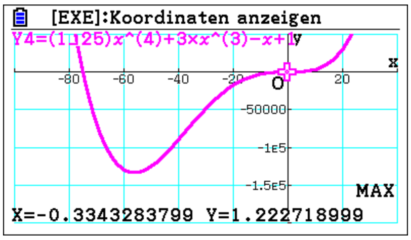
Peter hat erkannt, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades mit positivem a_4 von links oben nach rechts oben verlaufen muss und daher die Darstellung am linken Rand fehlt. Man vergrößert daher den x- und y-Bereich im negativen Bereich entsprechend. Die Nullstellen können über G-Solve und Root bestimmt werden, da sie nun beide im Darstellungsbereich liegen. Nachteilig an dieser Darstellung ist, dass man das lokale Maximum und Minimum in der Nähe der y-Achse als Sattelpunkt identifizieren könnte. Allerdings liefert G-Solve auch hier Gewissheit. In Kürze werden wir verstehen, dass das globale Minimum bei ca. x = -56 (eine Funktion vierten Grades kann maximal 3 Extremstellen besitzen). Insbesondere kann es daher auch keine weiteren Nullstellen geben.

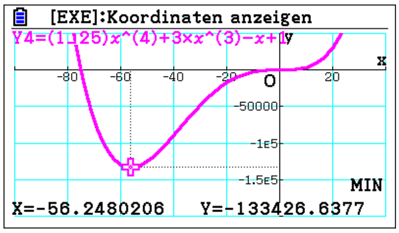












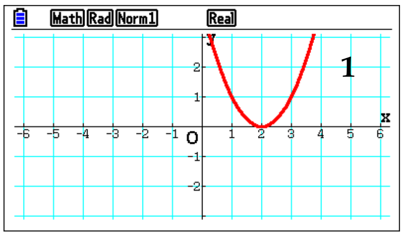
7a)

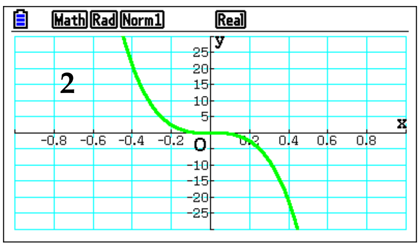
(1) $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

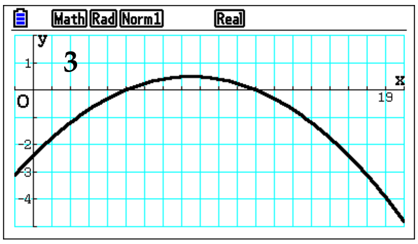
(2) $f(x) = -(x^2 + 1{,}5) \cdot 200x^3 = -200x^5 - 300x^3$

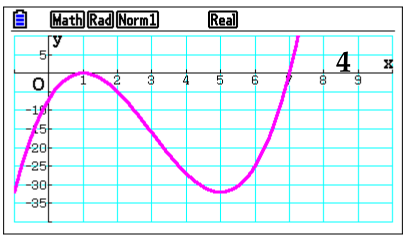
(3) $f(x) = \dfrac{(x-5)(12-x)}{25} = -0{,}04x^2 + 0{,}68x - 2{,}4$

(4) $f(x) = (x-1)^2(x-7) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$



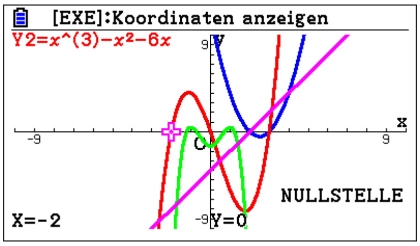


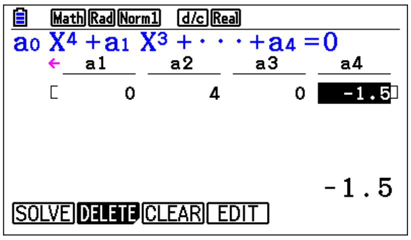


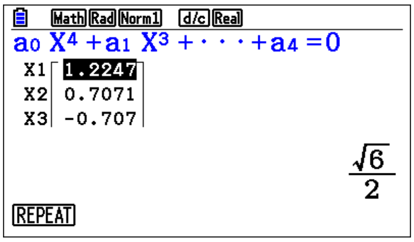


2 Nullstellen und Symmetrie ganzrationaler Funktionen

1) x = 2; x= 2; 3; x = -2; 3; x= $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1{,}2$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}7$







2a)

$f_1(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

$f_2(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 0 \underset{:2}{\Leftrightarrow} x^2 - 5x + 6 = 0$; Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-2{,}5)^2 - 6 = 0{,}25$.
Daher ergeben sich die Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 2{,}5 \pm \sqrt{D} = 2{,}5 \pm 0{,}5$

2b)

$k(x) = (x-2) \cdot (x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$
$l(x) = (x-1) \cdot (x+9) \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -9 \vee x = -2$
$m(x) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (2x-2) \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x = -3 \vee 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 1$

Durch Ausmultiplizieren erhielte man die exakten Terme. Für die gestellte Frage reicht es aus, jeweils den ersten und letzten Summanden jeder Klammer miteinander zu multiplizieren. Man erhält:

	$k(x) = (x-2) \cdot (x+3)$ $= x^2 + \dots + (-6)$	$l(x) = (x-1) \cdot (x+9) \cdot (x+2)$ $= x^3 + \dots + (-18)$	$m(x) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (2x-2)$ $= 2x^4 + \dots + (-6)x^2$
a_0	-6	-18	0
grad	2	3	4
g(x)	x^2	x^3	$2x^4$

2c)

$f_3(x) = x^3 - x^2 - 6x = x \cdot (x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0$. Die quadratische Gleichung in Normalform hat die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0{,}5^2 + 6 = 6{,}25$. Daher ergeben sich die weiteren Lösungen bzw. Nullstellen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 0{,}5 \pm 2{,}5$, also x = 3 oder x = -2.

$f_4(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1{,}5 = 0 \underset{z=x^2}{\Longleftrightarrow} -2z^2 + 4z - 1{,}5 = 0 \underset{:(-2)}{\Longleftrightarrow} z^2 - 2z + 0{,}75 = 0$. Die quadratische Gleichung in Normalform hat die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-1)^2 - 0{,}75 = 0{,}25$. Daher ergeben sich als Lösungen für z: $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 1 \pm \sqrt{0{,}25} = 1 \pm 0{,}5$, also z = 1,5 oder z = 0,5. Die Rücksubstitution $z = x^2$ liefert $1{,}5 = x^2$ oder $0{,}5 = x^2$. Man erhält insgesamt $x = \pm\sqrt{1{,}5} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1{,}2$ oder $x = \pm\sqrt{0{,}5} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}7$

3a) $f(x) = (x-2)(x+3)(4x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3 \vee x = -0{,}5$ (Ablesen)

3b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x = -x \cdot (x^2 - 6x + 9) = x = 0 \vee (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (Faktorisieren)

3c) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \underset{z=x^2}{\Longleftrightarrow} z^2 + 5z + 4 = (z+1) \cdot (z+4) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = 4$. Die Rücksubstitution $z = x^2$ liefert $1 = x^2$ oder $4 = x^2$. Man erhält insgesamt $x = \pm 1$ oder $x = \pm 2$ (Substitution)

4a) $f(x) = (x-0)(x-2)(x-8)$ oder $f(x) = 2 \cdot (x-0)(x-2)(x-8)$

4b) $f(x) = (x+5)(x-10)^2$ oder $f(x) = (x+5)^2(x-10)$

4c) $f(x) = (x+3)(x-1)^2$ oder $f(x) = (x+3)^2(x-1)$

4d) $f(x) = (x-3)^3$ oder $f(x) = (x+5)\left(x^2+1\right)$

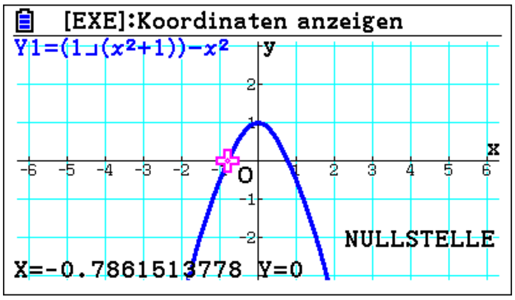
4e)

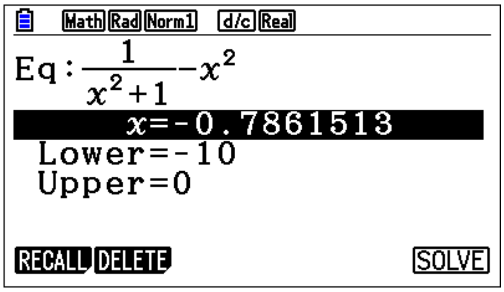
$f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$
$f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$
$f(x) = (x-1)^4(x-4)(x-5)(x-6)$
$f(x) = (x-1)^5(x-5)(x-6)$
$f(x) = (x-1)^6(x-2)$
$f(x) = (x-1)^7$

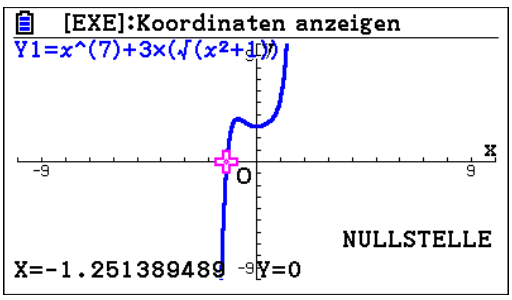
4f) Eine Funktion siebten Grades verläuft immer von rechts oben nach links unten oder umgekehrt, besitzt daher mindestens eine Nullstelle. Hätte eine Funktion siebten Grades mehr als sieben Nullstellen, müsste es sich als Produkt von mehr als sieben Linearfaktoren schreiben lassen. Würde man dieses Ausmultiplizieren erhielte man als Summand mit dem größten Exponenten ein Polynom mit höherem Grad als sieben.

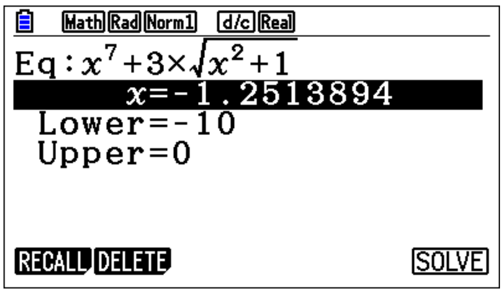
5

Lösungsstrategie mit dem GTR über MENU 5: Betrachte den Term als Funktionsterm und suche die Nullstellen. Beachte: Die Nullstellen müssen alle im Darstellungsbereich liegen. Dies bedarf unter Umständen weiterer Überlegungen. Alternativ kann man im MENU A (allgemeine Gleichung) die Ausgangsgleichung eingeben. Dann muss man einen Schätzwert angeben sowie die Grenzen. Allerdings müssen die Grenzen so gewählt sein, dass die Lösung auch zwischen den Grenzen liegt. Die folgenden Abbildungen geben die GTR-Lösung an:



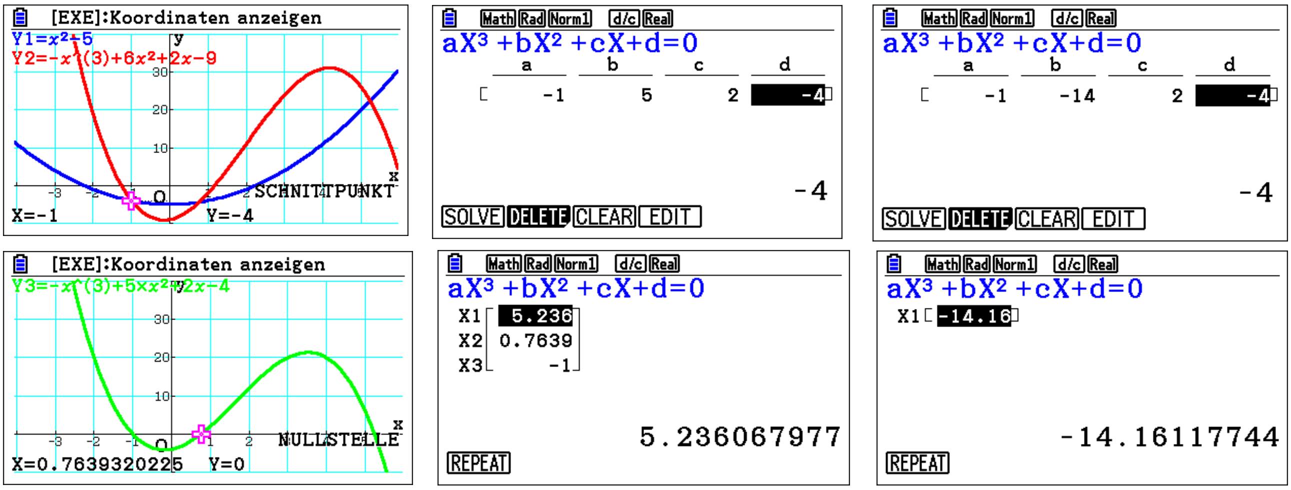






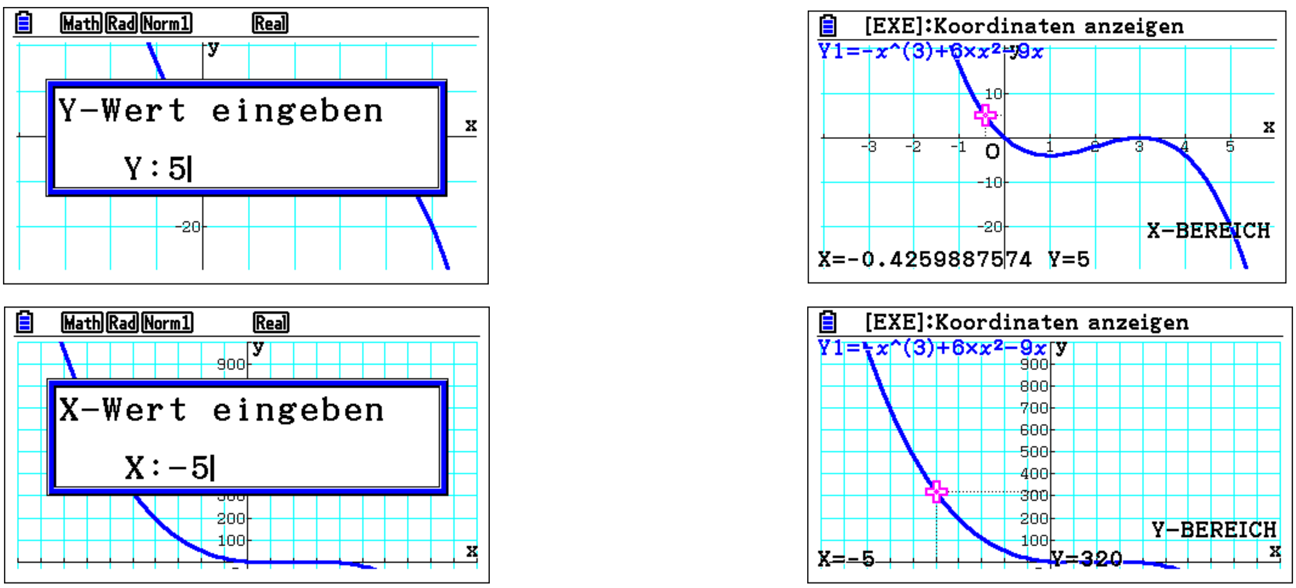
6a)

Hier können mehrere Möglichkeiten gewählt werden. Die Gleichung kann als Schnittwertberechnungsproblem (GSolve → INTSEC) zweier Funktionen aufgefasst werden (MENU 5). Die Gleichungen können auch erst so umgeformt werden, dass auf der rechten Seite eine Null steht. Dann kann man in MENU 5 über GSOLVE und ROOT die Nullstellen bestimmen. In beiden Fällen muss der Darstellungsbereich u. U. angepasst werden. Als dritte Möglichkeit bietet sich bei Polynomgleichungen MENU A an. Hier müssen die Koeffizienten nach Umformen in eine Polynomgleichung im GTR eingetragen werden. Es kann auch in MENU A der Modus (allgemeine Gleichung) gewählt werden. Allerdings ist es oft aufwendig die Grenzen zu bestimmen. Exemplarisch werden die ersten 3 Verfahren für die erste Gleichung durchgeführt (Abbildungen links und Mitte). Für die zweite Gleichung ergibt sich analog die Lösung -14,16. Es bietet sich hier eine Lösung MENU A an, da eine Umformung recht einfach von der Hand geht und der Darstellungsbereich in MENU 5 erst angepasst werden müsste (Abbildungen rechts)



6b) und c)

Für die Aufgabenteile b und c bietet sich in MENU 5 nach Eingabe der Funktionsgleichung GSolve und X-CAL und gibt den entsprechenden y-Wert ein. Analog gibt man Y-CAL ein, wenn man den y-Wert bei gegebenen x-Wert bestimmen möchte. Beachte: Der Darstellungsbereich muss über VWindow zu Beginn so eingestellt werden, dass die gesuchten x- und y-Werte im Darstellungsbereich liegen. Bei gleichverteilten x- und y-Werten bietet sich daher die Tabellenfunktion an.



7

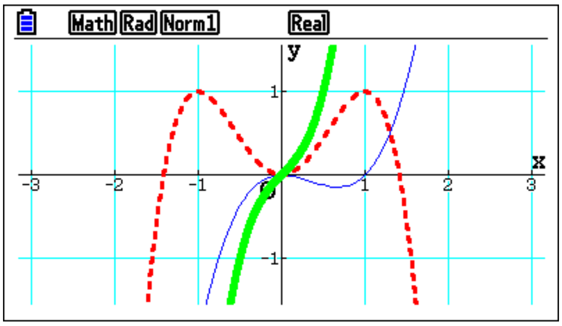
(1) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$	(2) $g(x) = x^3 - x$	(3) $h(x) = x^3 + x^2$	(4) $k(x) = x^8 - x^2$
$f(-a)$ $= (-a)^4 + (-a)^2 - 2$ $= a^4 + a^2 - 2$ $= f(a) \Rightarrow$ AS	$g(-a)$ $= (-a)^3 - (-a)$ $= -a^3 + a = -(a^3 - a)$ $= -g(a) \Rightarrow$ PS	$h(-a) \neq h(a)$ $h(-a) \neq -h(a)$ $\Rightarrow$ keine Symmetrie	$k(-a)$ $= (-a)^8 + (-a)^2 - 2$ $= a^8 + a^2 - 2$ $= k(a) \Rightarrow$ AS

Die Grafen zu f und k sind achsensymmetrisch zur y-Achse (AS). Der Graf zu g ist punktsymmetrisch zum Ursprung (PS). Der Graf zu h weist keine besondere Symmetrie auf.

8

(1) $f(x) = \frac{3}{x^4}$	(2) $g(x) = \frac{2}{x^2+4}$	(3) $h(x) = x - \frac{x}{x^2-1}$	(4) $h(x) = x - \frac{x}{x^3-x}$
$f(-a)$ $= \frac{3}{(-a)^4}$ $= \frac{3}{a^4}$ $= f(a)$ $\Rightarrow$ f gerade	$g(-a)$ $= \frac{2}{(-a)^2 + 4}$ $= \frac{2}{a^2 + 4}$ $= g(a)$ $\Rightarrow$ g gerade	$h(-a)$ $= -a - \frac{-a}{(-a)^2 - 1}$ $= -a + \frac{a}{a^2 - 1}$ $= -\left(a - \frac{a}{a^2 - 1}\right)$ $= -h(a)$ $\Rightarrow$ h ungerade	keine Symmetrie

9a) f (dünn), g (gestrichelt), h (fett)



9b)

Über die Nullstellen kann man die Funktionsgleichungen in ihre Linearfaktoren faktorisieren:

1: $f(x) = ax(x-3)(x+3)$. Der Vorfaktor a ist positiv, da der Graf von rechts unten nach links oben verläuft. Einsetzen von Koordinaten eines Grafenpunktes lieferte a. In unserem Fall ist $a = \frac{1}{9}$.

2: $f(x) = ax^2(x-2)$. Da 0 doppelte Nullstelle ist und der Graf von unten links nach oben rechts verläuft kann der Funktionsgleichung mit der weiteren Nullstelle x = 2 entsprechend faktorisiert werden. Der Vorfaktor beträgt in unserem Fall a = 2.

3: $f(x) = a(x+1)^2(x-1)^2$. Es handelt sich um zwei doppelte Nullstellen. Der Graf schneidet die y-Achse bei y = -1. Der Parameter a muss den Wert -1 haben, da beim Ausmultiplizieren der beiden quadratischen Terme für a_0 gilt: $-1 = a_0 = a \cdot 1^2 \cdot 1^2 = a$.

10a)

Eine ungerade ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle. Stimmt, da deren Graf immer von unten nach oben oder von oben nach unten verläuft und die x-Achse mindestens einmal schneiden muss.

10b)

Eine gerade Funktion hat eine gerade Anzahl von Nullstellen. Falsch: Die Funktion der Normalparabel hat genau eine Nullstelle. Die Aussage wird richtig, wenn die Nullstelle ungleich Null ist.

10c)

Eine ganzrationale Funktion fünften Grades hat genau 5 Nullstellen. Stimmt im Allgemeinen nicht, da beispielsweise die Funktion f mit $f(x) = (x - a)^5$ den Grad 5 hat und genau eine Nullstelle besitzt.

10d)

Wenn eine gerade Funktion die Nullstelle x = 2 besitzt, dann auch die Nullstelle x = -2. Richtig, da für alle a f(-a) = f(a) gilt, also auch für die Nullstelle x = 2.

11a) E: Graf symmetrisch zum Ursprung oder zur y-Achse; $P(E) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

$f(x) = x^7 + 2x^3 - 8x$	$f(x) = x^5 + 4x - 1$	$f(x) = -x^3 + x^2$	$f(x) = 6x^2 + 2$	$f(x) = -x^2$
$f(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^3 - x^2$	$f(x) = 3x + 1$

11b) E: Graf verhält sich nahe Null wie $h(x) = x^2$ und für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$; $P(E) = \frac{0}{10}$

$f(x) = x^7 + 2x^3 - 8x$	$f(x) = x^5 + 4x - 1$	$f(x) = -x^3 + x^2$	$f(x) = 6x^2 + 2$	$f(x) = -x^2$
$f(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^3 - x^2$	$f(x) = 3x + 1$

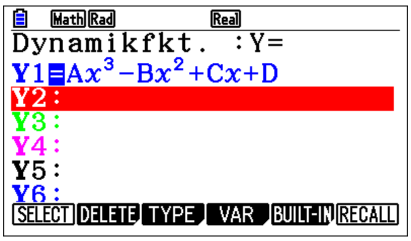
11c) E: Graf geht durch den Ursprung oder ist symmetrisch zur y-Achse; $P(E) = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$

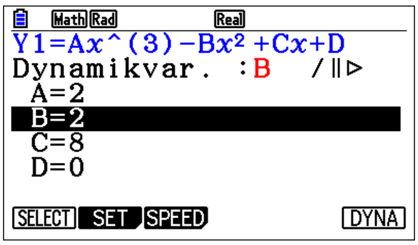
$f(x) = x^7 + 2x^3 - 8x$	$f(x) = x^5 + 4x - 1$	$f(x) = -x^3 + x^2$	$f(x) = 6x^2 + 2$	$f(x) = -x^2$
$f(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^3 - x^2$	$f(x) = 3x + 1$

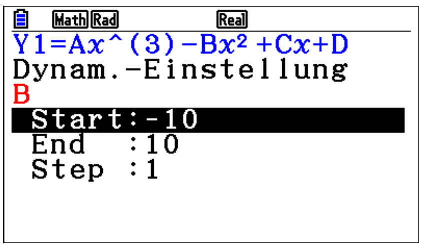
11d) E: Graf geht nicht durch den Ursprung und ist nicht symmetrisch zur y-Achse. $P(E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

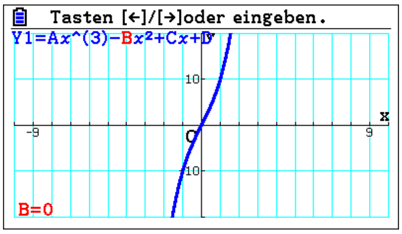
$f(x) = x^7 + 2x^3 - 8x$	$\mathbf{f(x) = x^5 + 4x - 1}$	$f(x) = -x^3 + x^2$	$f(x) = 6x^2 + 2$	$f(x) = -x^2$
$f(x) = -x^4 + 3x^3 + x^2$	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^3 - x^2$	$\mathbf{f(x) = 3x + 1}$

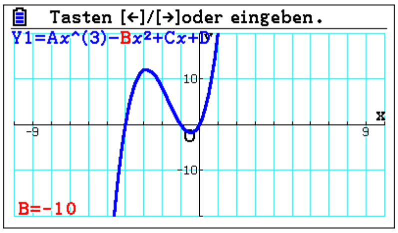
12a)

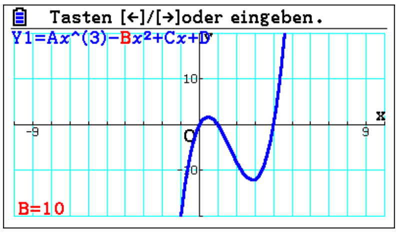












12b) Für **t = 0** ist f_t ungerade, da der quadratische Summand in diesem Fall fehlt: $f_0(x) = 2x^3 + 8x$

Allgemeiner Ansatz:

$f_t(x) = 2x^3 - tx^2 + 8x = x(2x^2 - tx + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - tx + 8 = 0 \underset{:2}{\Leftrightarrow} x = 0 \vee x^2 - \frac{1}{2}tx + 4 = 0.$

Die quadratische Gleichung in Normalform hat als Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{4}t\right)^2 - 4 = \frac{1}{16}t^2 - 4$. Ist die Diskriminante negativ, gibt es keine weiteren Nullstellen, ist sie Null, gibt es eine weitere Nullstelle und ist sie größer Null, kommen 2 Nullstellen dazu. Es gilt $D = \frac{1}{16}t^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}t^2 < 4 \Leftrightarrow t^2 < 64 \Leftrightarrow -8 < t < 8$.

12c)

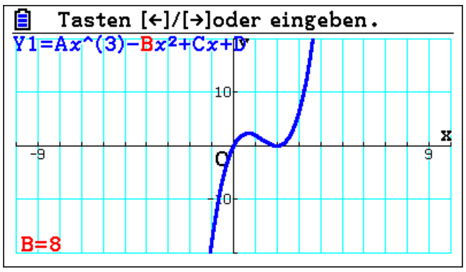
- Im Falle **-8 < t < 8** kommt keine Nullstelle dazu. Es gibt insgesamt **1 Nullstelle**.
- Der Graf von f besitzt für **t = 8** und **t = -8** genau **2 Nullstellen.**
- Für **t > 8 oder t < -8** hat er **3 Nullstellen**.

12d)

Für die weiteren Nullstellen erhält man $x_t = \frac{1}{4}t \pm \sqrt{\frac{1}{16}t^2 - 4}$. Daher gilt:

- Für **t = 2** erhält man also nur die Nullstelle **0**.
- Für **t = 10** erhält man $x_{10} = 2{,}5 \pm \sqrt{\frac{1}{16}10^2 - 4} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 2{,}5 \pm 1{,}5$ und damit insgesamt die Nullstellen **0; 1; 4.**
- Für **t = -10** ergibt sich $x_{-10} = -2{,}5 \pm \sqrt{\frac{1}{16}(-10)^2 - 4} = -2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = -2{,}5 \pm 1{,}5$, also insgesamt die Nullstellen **0; -4; -1**.

12e) Für **t = 8** liegt eine Nullstelle von f_8 bei **x = 2.**



Algebraischer Beweis: $\frac{1}{4}t \pm \sqrt{\frac{1}{16}t^2 - 4} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t - 2 = \pm\sqrt{\frac{1}{16}t^2 - 4} \underset{\text{quadrieren}}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{1}{4}t - 2\right)^2 = \frac{1}{16}t^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{16}t^2 - t + 4 = \frac{1}{16}t^2 - 4 \Leftrightarrow t = 8$

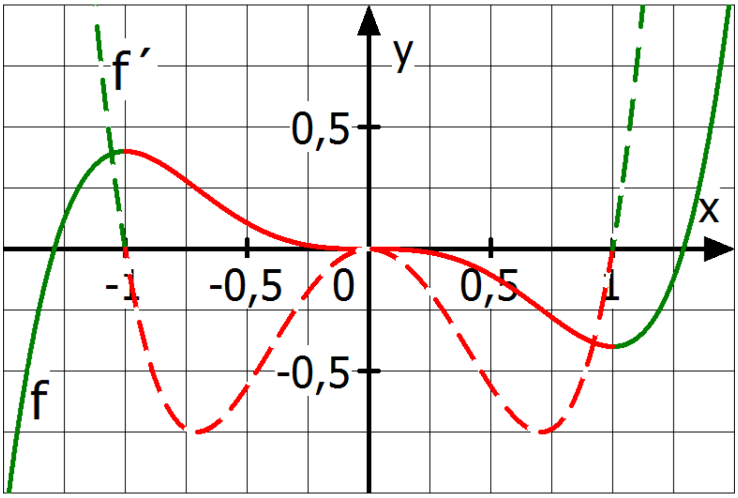
3 Monotonie und Extremstellen ganzrationaler Funktionen

1

Man erkennt im Bereich der Hauptschule eine kontinuierliche Anteilabnahme beider Geschlechter. Dies könnte man auf die Etikettierung der Hauptschule als „Resteschule" zurückführen sowie auf die flächendeckende Umwandlung von Hauptschulen in Gesamtschulen in den 1970er und 1980er Jahren. Darüber hinaus werden in einigen Komunen Hauptschulen geschlossen, da die Anmeldezahlen stark rückläufig sind. Daher sind eine Anteilzunahmen bei den Gesamtschulen und Realschulen verständlich.

Der Anteil der Gymnasiasten nimmt in beiden Geschlechtern zu. Dies könnte mit der politischen Zielrichtung zusammenhängen, dass aufgrund der ständig sinkenden Schülerzahlen die Gesamtzahl der Abiturienten gleich bleiben soll. Der Anteilsunterschied zwischen Jungen und Mädchen im Bereich des Gymnasiums könnte auf eine starke Mädchenförderung im Grundschulbereich zurückgeführt werden.

2a)



2b) $f'(x) = 3x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x^2 - 1) = 3x^2(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1 \lor x = -1$

2c)

Intervall	x < -1		-1 < x < 0		0 < x < 1		x > 1
z. B. x_0	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2
$f'(x_0)$	**36**	**0**	**−0,5625**	**0**	**-0,5625**	**0**	**36**
Vorzeichen von f´	**+**		**−**		**−**		**+**
Monotonie von f	↑	→	↓	→	↓	→	↑

2d) Vergleiche Aufgabe 6

2e)

(1) $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (0 Minimumstelle)

Intervall	x < 0		x > 0
z. B. x_0	-1	0	1
$g'(x_0)$	**-2**	**0**	**2**
VZ von g´	**−**		**+**
Monotonie von g	↓	→	↑

(2) $g'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ($-\sqrt{3}$ ist lokale Maximumstelle; $\sqrt{3}$ ist lokale Minimumstelle)

Intervall	$x < -\sqrt{3}$		$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$		$x > \sqrt{3}$
z. B. x_0	-2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0,5
$g'(x_0)$	**3**	**0**	**−9**	**0**	**3**
VZ von g´	**+**		**−**		**+**
Monotonie von g	↑	→	↓	→	↑

(3) $g'(x) = 1$: Gerade ist überall streng monoton wachsend.

(4) $g'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (0: globale Minimumstelle)

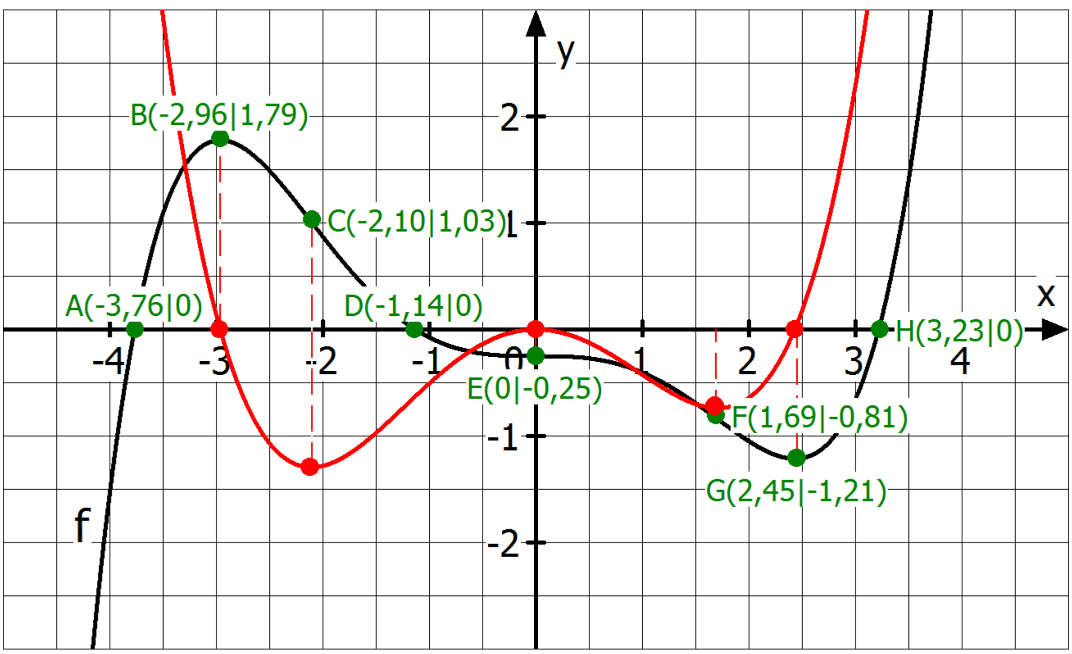
Intervall	$x < 0$		$x > 0$
z. B. x_0	-1	0	1
$g'(x_0)$	**-6**	**0**	**+6**
VZ von g´	**−**		**+**
Monotonie von g	↓	→	↑

(5) $g'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{0,5}$ ($\pm\sqrt{0,5}$: Minimumstellen; 0: Maximumstelle)

Intervall	$x < -\sqrt{0,5}$		$-\sqrt{0,5} < x < 0$		$0 < x < \sqrt{0,5}$		$x > \sqrt{0,5}$
z. B. x_0	-1	$-\sqrt{0,5}$	$-0,5$	0	0,5	$\sqrt{0,5}$	1
$g'(x_0)$	**-2**	**0**	**0,5**	**0**	**-0,5**	**0**	**2**
VZ von g´	**−**		**+**		**−**		**+**
Monotonie von g	↓	→	↑	→	↓	→	↑

Grafen zu (1) bis (5) vgl. Lösungen zu Aufgabe 7

3

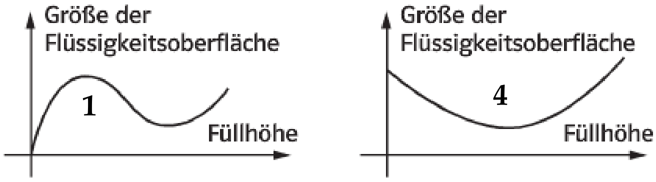


Schnittpunkte mit der x-Achse: A, D, H
lokaler Hochpunkt: B
Wendepunkte: C, E, F

Schnittpunkt mit der y-Achse: E
Lokaler Tiefpunkt: G
Sattelpunkt: E

4a) Die Funktion h ist für Gefäß 3 **streng** monoton zunehmend. Die Funktion h für Gefäß 2 ist streng monoton abnehmend. Damit die Funktion monoton abnehmend ist. Damit die Funktion monoton zunehmend ist, muss die seitliche Begrenzungslinie des Profils durchgehend nach außen oder vertikal verlaufen. Damit sie monoton abnehmend ist, muss die Begrenzungslinie nach innen oder vertikal verlaufen.

4b)



4c)

streng monoton zunehmend	monoton zunehmend, nicht aber streng monoton zunehmend	streng monoton abnehmend
		

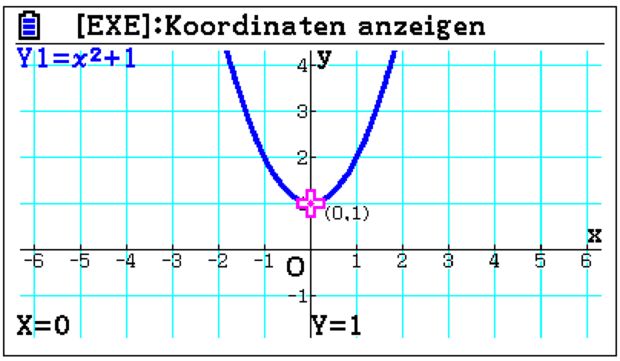
5a) Zusammen gehören f und g sowie k und h. Begründung: Die Bereiche, in denen die Grafen von f und k steigen bzw. fallen, liegt der Graf der jeweiligen Ableitungsfunktion über oder unterhalb der x-Achse.

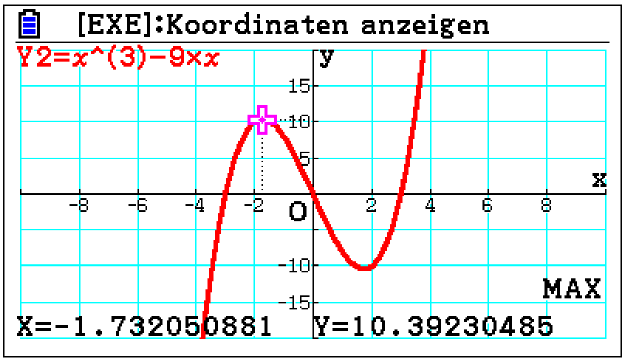
5b) vgl. Aufgabe 6

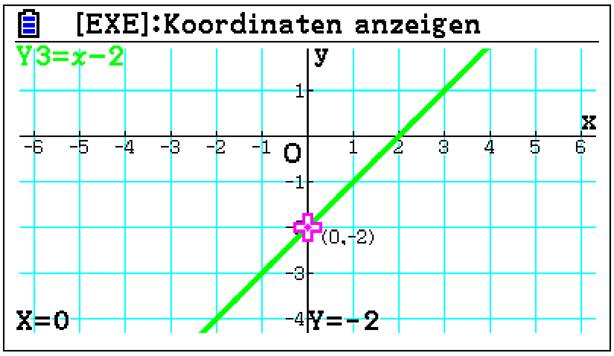
5c) Vgl. Aufgabe 6. Wenn es regnet, ist die der Boden nass. Allerdings gilt die Umkehrung nicht. Denn der Boden kann auch durch Wasser aus einem Gartenschlauch nass geworden sein. Man sagt: Ein nasser Boden ist notwendig für Regen, nicht aber hinreichend.

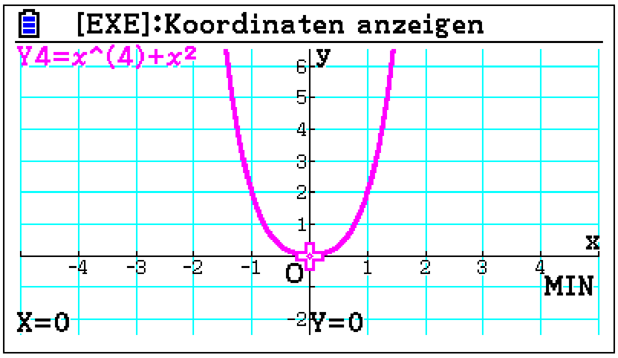
7

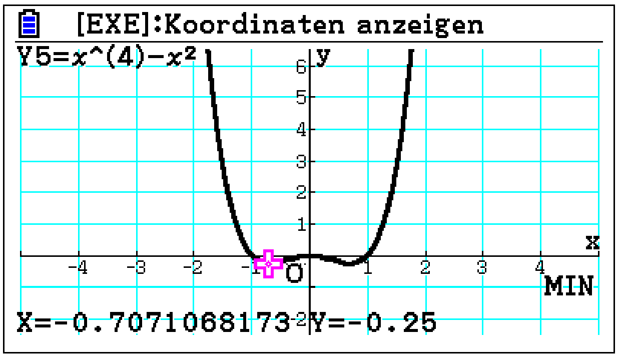
(1) $g'(0) = 0$ **und** VZW von g' bei 0 von $-$ nach $+ \Rightarrow$ 0 ist lokale Minimumstelle.
(2) $g'(-\sqrt{3}) = 0$ **und** VZW von g' bei $-\sqrt{3}$ von $+$ nach $- \Rightarrow$ $-\sqrt{3}$ ist lokale Maximumstelle.
$g'(-\sqrt{3}) = 0$ **und** VZW von g' bei $\sqrt{3}$ von $-$ nach $+ \Rightarrow$ $\sqrt{3}$ ist lokale Minimumstelle.
(3) $g'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ g hat keine Extremstellen (notwendige Bedingung ist nicht erfüllt)
(4) $g'(0) = 0$ **und** VZW von g' bei 0 von $-$ nach$+ \Rightarrow$ 0 ist eine lokale Minimumstelle.
(5) $g'(0) = 0$ **und** VZW von g' bei 0 von $+$ nach $- \Rightarrow$ 0 ist eine lokale Maximumstelle.
$g'\left(-\sqrt{0{,}5}\right) = 0$ **und** VZW von g' bei $-\sqrt{0{,}5}$ von $-$ nach $+ \Rightarrow -\sqrt{0{,}5}$ ist lokale Minimumstelle.
$g'\left(\sqrt{0{,}5}\right) = 0$ **und** VZW von g' bei$\sqrt{0{,}5}$ von $-$ nach $+ \Rightarrow \sqrt{0{,}5}$ ist lokale Minimumstelle.









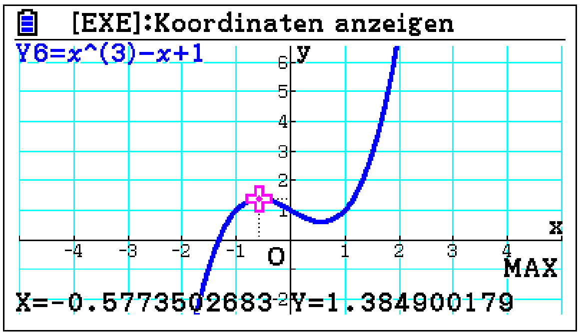


8a) $f'(x) = 3x^2$. Es gilt $f'(0) = 0$, obwohl der Graf überall streng monoton wachsend ist. Also gilt f ist nicht überall größer Null und gleichzeitig streng monoton wachsend. Daher gilt die Umkehrung „**Wenn** der Graph von f über I streng monoton zunehmend ist, **dann** ist $f'(x) > 0$ für alle x eines Intervalls I." für die Stelle $x_0 = 0$ der Funktion f mit $f(x) = x^3$ nicht.

8b) Es gilt $f'(0) = 0$, obwohl der Graf bei $x_0 = 0$ keine Extremstelle, sondern eine Sattelstelle hat.

8c) $f'(x) = 1 > 0$. Allerdings ist die Gerade f mit $f(x) = x$ überall streng monoton wachsend.

9

Aussage	**wahr**	**falsch**	**Begründung**
a) Ist die Ableitungsfunktion f´ eine quadratische Funktion mit zwei Nullstellen, so besitzt der Graf von f genau einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt.	x		Es gibt an den Nullstellen von f jeweils einen VZW von f´ von + nach – bzw. von – nach +, was hinreichend für eine Minimum- bzw. Maximumstelle ist.
b) Zu jeder Nullstelle der Ableitungsfunktion f´ gehört eine Extremstelle von f.		x	Sattelpunkte haben auch die Steigung Null.
c) Zwischen zwei benachbarten Extrempunkten auf dem Grafen von f liegt immer ein Schnittpunkt mit der x-Achse.		x	
d) Besitzt eine ganzrationale Funktion 4. Grades genau zwei Hochpunkte und einen Tiefpunkt, so ist der Graf ihrer zweiten Ableitung eine nach oben geöffnete Parabel.		x	Eine GRF 4. Grades mit 2 HP und 1 TP muss von links unten nach rechts unten verlaufen. Daher ist der Koeffizient a_4 vor dem x^4 negativ. Also: f´ hat als quadratischen Summanden $12a_4x^2$ mit $12a_4 < 0$. Der Graf von f´´ ist somit eine nach unten geöffnete Parabel.
e) Der Grad der Funktion ist 3. Die Funktion ist ungerade und hat eine Minimumstelle bei x = 1 und eine Maximumstelle bei x = 2.		x	Wenn 1 lokale Maximumstelle ist, müsste -1 eine lokale Minimumstelle sein. Da eine Funktion 3. Grades maximal 2 Extremstellen hat, kann 2 keine weitere Extremstelle sein.
f) Eine ganzrationale Funktion 6. Grades kann höchstens 5 Extremstellen besitzen.	x		Hätte eine Funktion 6. Grades mehr als 6 Extremstellen müsste die Ableitung der Funktion f als Funktion 5. Grades mehr als 5 Nullstellen haben, was nicht möglich ist.
g) Besitzt die Ableitung einer Funktion f genau drei Nullstellen, so besitzt die Funktion genau drei Extremstellen.		x	Es gibt GRF mit zwei Extremstellen und einer Sattelstelle (vgl. Aufgabe 2)
h) Eine Funktion dritten Grades verläuft von links oben nach rechts unten. Der Graph der Ableitung ist eine nach unten geöffnete Parabel.	x		Der Koeffizient a_3 des Summanden a_3x^3 von f ist negativ. Daher gilt für den quadratischen Summanden von f ´ $3a_3x^2$ mit $3a_3 < 0$. Der Graf von f´ ist daher eine nach unten geöffnete Parabel.
i) Jede Funktion vierten Grades hat mindestens eine Extremstelle.	x		Denn die Ableitungsfunktion f´ hat als Funktion dritten Grades mindestens eine Nullstelle mit VZW von f´.

4 Krümmungsverhalten und Wendestellen

1c)

$f'(x) = x^2 - x + 2$; $f''(x) = 2x - 1$; $f''(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$

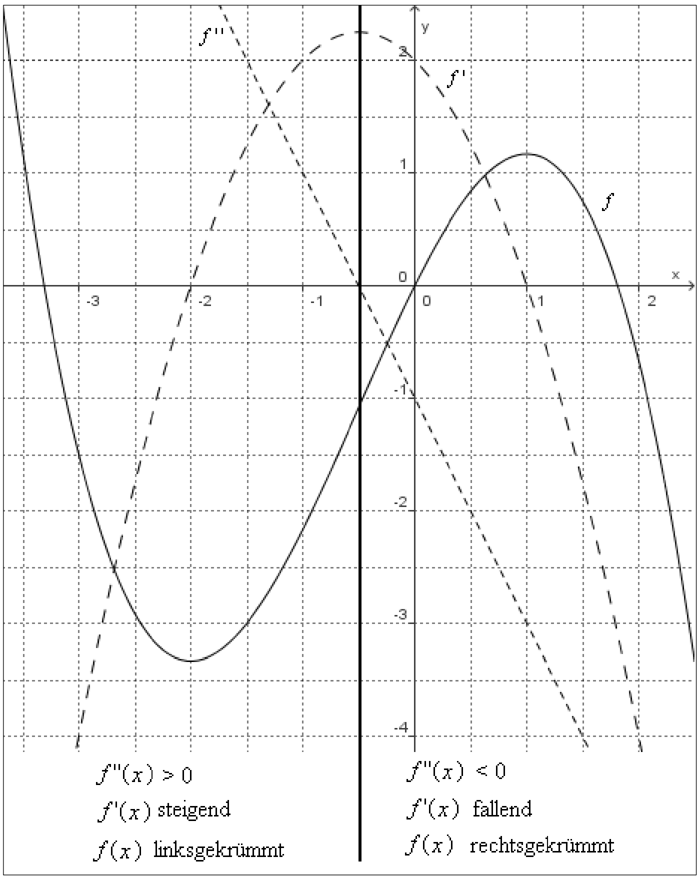
Intervall	x < 0,5		x > 0,5
z. B. x_0	0	0,5	1
$f''(x_0)$	-1	0	1
VZ von f´´	−		+
Krümmung	☹	WP	☺

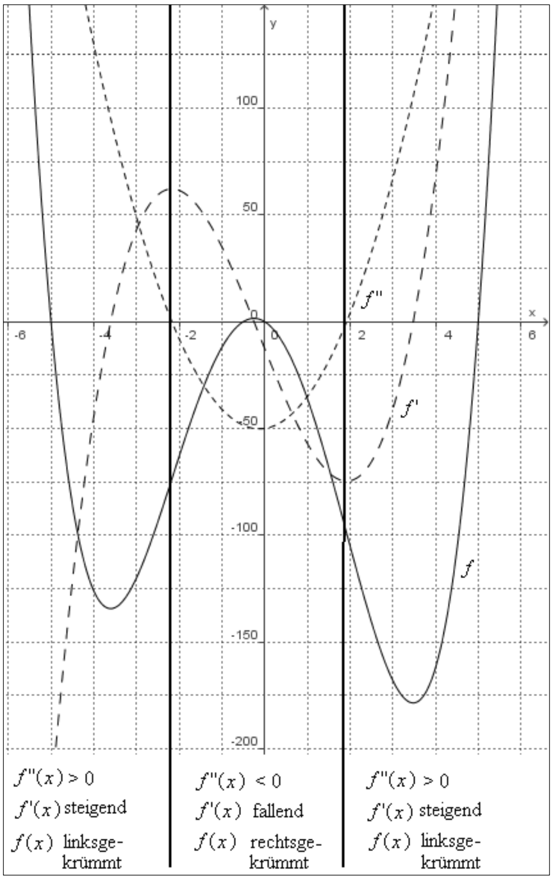
Die Funktion f hat an der Stelle x = 0,5 eine Rechts-Links-Wendestelle (Abbildung unten links).

$f'(x) = 4x^3 + 1{,}5x^2 - 50x - 12{,}5$ f; $f''(x) = 12x^2 + 3x - 50$;
$f''(x) = 12x^2 + 3x - 50 = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} x \approx 1{,}92 \vee x \approx -2{,}17$.

Intervall	x < −2,17		−2,17 < x < 1,92		x > 1,92
z. B. x_0	0	−2,17	0	1,92	2
$f''(x_0)$	49	0	-50	0	4
VZ von f´´	+		−		+
Krümmung	☺	WP	☹	WP	☺

Die Funktion f hat an der Stelle x = −2,17 eine Links-Rechts-Wendestelle und bei x = 1,92 eine Rechts-Links-Wendestelle. Am Wendepunkt $W(0{,}5/\ f(0{,}5) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83)$ ändert der Graf von f sein Krümmungsverhalten von einer rechts- in eine linksgekrümmte Kurve (Abbildung unten rechts).





2a) Die notwendige Bedingung für lokale Extrema lautet: $f'(x_E) = 0$. Die hinreichende Bedingung für lokale Extrema haben wir mithilfe eines VZW von f´ erledigt. Es gilt also: $f'(x_E) = 0$ und f´ hat einen VZW von + (–) nach – (+) ⇒ x_E ist lokale Maximumstelle (Minimumstelle).

2b) Wenn f bei x_0 rechtsgekrümmt ist, ist f´ in einer Umgebung von x_0 streng monoton abnehmend. Wegen $f'(x_0) = 0$ liegt daher bei x_0 ein VZW von f´ von + nach – vor. Somit ist die hinreichende Bedingung mittels VZW von f´ erfüllt und bei x_0 liegt ein lokale Maximumstelle vor.

2c) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ und f ist bei x_0 rechtsgekrümmt $\underset{2b)}{\Rightarrow}$ x_0 ist lokale Maximumstelle von f.

2d) Es gilt analog: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Minimumstelle von f.

2e) Da eine Wendestelle von f auch gleichzeitig Extremstelle von f´ ist, lassen sich die hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen von f´ auf die Wendestelle von f übertragen. Es gilt somit:
$f'''(x_0) = 0 \ \wedge f'''(x_0) \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale $\begin{Bmatrix} \text{Minimumstelle} \\ \text{Maximumstelle} \end{Bmatrix}$ von $f' \Rightarrow$
x_0 ist eine $\begin{Bmatrix} \text{Rechts} - \text{Links} - \\ \text{Links} - \text{Rechts} - \end{Bmatrix}$ Wendestelle von f

3

Ableitungen (f´, f´´ und f´´´) bestimmen: $f'(x) = 1{,}5x^2 - 8x + 8$; $f''(x) = 3x - 8$; $f'''(x) = 3$

3a) Symmetrie: Es liegt keine besondere Symmetrie vor, da in f(x) Potenzen von x mit geraden und ungeraden Exponenten vorkommen

3b) Verhalten im Unendlichen/nahe Null: Das Verhalten im Unendlichen hängt von $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ab. Der Graf verläuft von links unten nach rechts oben. Das Verhalten nahe Null wird durch h(x) = 8x bestimmt. Der Graph nähert sich in der Umgebung von Null der Geraden y = 8x an.

3c) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: Für x = 0 gilt f(0) = 0. Daher ist der Ursprung Schnittpunkt des Graphen mit der x- und y-Achse. Für die weiteren Schnittpunkte mit der x-Achse gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 4$. Der weitere Schnittpunkt lautet (4/0). Insbesondere ist 4 eine doppelte Nullstelle.

3d) Extrempunkte:

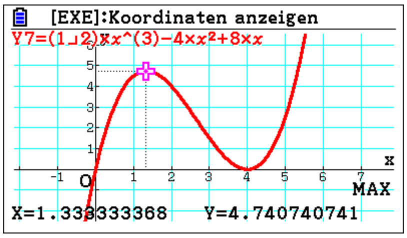
1) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $1{,}5x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ oder x = 4 Mögliche Kandidaten für lokale Extremstellen sind $\frac{4}{3}$ und 4.	2) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 8 = -4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Maximumstelle $f''(4) = 3 \cdot 4 - 8 = +4$: $\frac{4}{3}$ ist lokale Minimumstelle 3) y-Werte der Extrempunkte: $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{128}{27}$ und f(4) = 0
Insgesamt gilt: H $\left(\frac{4}{3} / \frac{128}{27}\right)$ lokaler Hochpunkt und T(4/0) lokaler Tiefpunkt.	

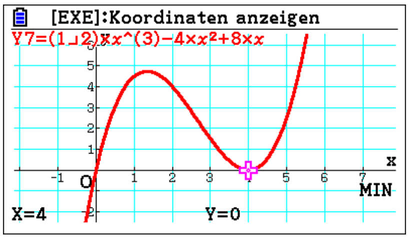
3e) Wendepunkte:

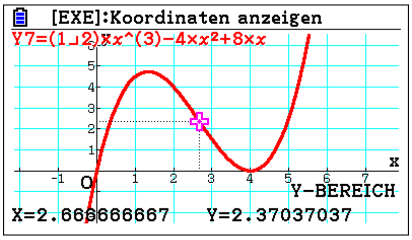
1) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$. Möglicher Kandidat für eine Wendestelle ist $\frac{8}{3}$	2) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ $f''\left(\frac{8}{3}\right) = 3 > 0$: $\frac{8}{3}$ ist Re-Li-Wendestelle („ReLiPo“) 3) y-Wertes des Wendepunktes: $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$
Insgesamt gilt: $W\left(\frac{8}{3} / \frac{64}{27}\right)$ ist Rechts-Links-Wendepunkt	

3f) Graph:

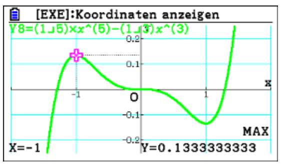
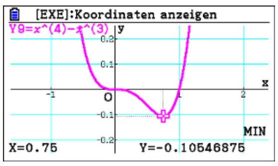
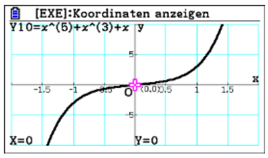
x	-0,25	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	-2,3	0	3,06	4,5	4,7	4	2,8	1,5	0,4	0	0,6	2,5







3g)

	$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$	$f(x) = x^4 - x^3$	$f(x) = x^5 + x^3 + x$
Symmetrie	Punktsymmetrie	keine Symmetrie	Punktsymmetrie
Verhalten an den Rändern	von links unten nach rechts oben	von links oben nach rechts oben	von links unten nach rechts oben
Verhalten nahe Null	wie $y = -\frac{1}{3}x^3$	wie $y = -x^3$	wie $y = x$
Extrempunkte	H(-1/0,13), T(1/-0,13)	T(0,75/-0,11)	
Wendepunkte	W(0/0) (Sattelpunkt)	W(0/0) (Sattelpunkt)	
Graf			

6 Kontrollaufgaben – Vorbereitung auf die Zentralklausur

Aufgabe 1

a) $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + \frac{16}{3} = \frac{8}{3} - 8 + \frac{16}{3} = 0$

b)

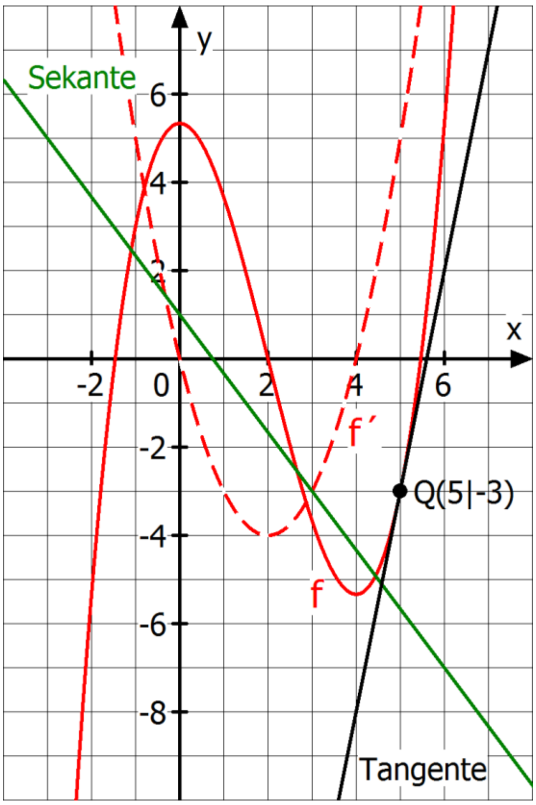
$f(x) = (x-2) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x - \frac{8}{3}\right) = 0$. Die erste Klammer ist Null, wenn x = 2 ist (vgl. Aufgabenteil a)). Die zweite Klammer wird Null, wenn $\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x - 8 = 0$. Für die Diskriminante D gilt: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-8) = 12$. Daher ergeben sich die beiden Lösungen (= Nullstellen) $-\frac{p}{2} + \sqrt{D} = 2 + \sqrt{12}$ und $-\frac{p}{2} - \sqrt{D} = 2 - \sqrt{12}$. Die Nullstellen haben also den Abstand $\sqrt{12}$.

c) Es gilt: $m_{\text{Tangente}} = f'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$ mit $f'(x) = x^2 - 4 \cdot x$. Also gilt für die Tangentengleichung $t(x) = -4 \cdot x + b$. Setz man die Koordinaten von P in t ein $0 = -4 \cdot 2 + b$. Also: b = 8. Insgesamt: $t(x) = -4 \cdot x + 8$.

d) Offensichtlich ist g Sekante zum Graphen von f

e) Ablesung: $m_{\text{Tangente}} = 5$; Rechnung: $f'(5) = 25^2 - 4 \cdot 5 = 5$.

f)



Der Graph der Ableitung muss eine nach oben geöffnete Parabel sein, da $f'(x) = x^2 - 4 \cdot x$ die Funktionsgleichung einer nach oben geöffneten Normalparabel ist (alternativ kann auch mit dem Steigungsverhalten des Graphen von f argumentiert werden, z. B.: bis zur Extremstelle bei 0 und ab x = 4 steigt der Graph von f, so dass der Graph von f´ dort komplett oberhalb der x-Achse liegt. Dies ist nur möglich für eine nach oben geöffnete Parabel.)

g)

Der Graph ist rechts eingezeichnet der Tiefpunkt kann durch f´(2) = -4 aus Aufgabenteil c) genau ermittelt werden.

h)

Zu g: Die Funktion f als Ableitung der Funktion h müsste an der Maximumstelle das VZ von + nach – wechseln. Zu h: Die Extremstellen von h stimmen nicht mit den Nullstellen von f überein.

i)

$f'(x) = x^2 - 4 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$. 0 und 4 sind also Kandidaten für Extremstellen. Es gilt $f'(-1) = 5$, $f'(1) = -3$ und $f'(5) = 5$. Die Ableitung f´ wechselt bei 0 das VZ von + nach - und bei 4 von – nach +. 0 ist daher lokale Maximumstelle und 4 lokale Minimumstelle.

j)

Für $d = -\frac{16}{3}$ und $d = \frac{16}{3}$ wird der Graph von f genau um das lokale Maximum $-\frac{16}{3}$ nach unten bzw. lokale Minimum $\frac{16}{3}$ nach oben verschoben, so dass 0 bzw. 4 doppelte Nullstellen von h_d sind.

k)

(1) Bei Zunahme des Parameters c verschiebt sich der Graph von i_c nach rechts; **(2)** Mögliche Werte für c sind c = -2 (mittlere Nullstelle von f wird nach links in den Ursprung verschoben) oder $c = \sqrt{12} - 2$ (linke Nullstelle von f wird nach rechts in den Ursprung verschoben) oder $c = \sqrt{12} + 2$ (rechte Nullstelle von f wird nach links in den Ursprung verschoben). **(3)** $i_{-2}(x) = f\big(x - (-2)\big) = f(x + 2) = (x + 2 - 2) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (x + 2)^2 - \frac{4}{3} \cdot (x + 2) - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{3} \cdot x \cdot (x^2 + 4x + 4 - 4x + 8 - 8) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{4}{3} \cdot x^1$. Der Funktionsterm von i_{-2} hat nur ungerade Potenzen von x, so dass der Graph zu i_{-2} punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

l)

$f''(x) = 2x - 4, f'''(x) = 2$. Es gilt: $f(2) = 0$, $f''(2) = 0$ und $f'''(2) > 0$. Daher ist P(2/0) Rechts-Links-Wendepunkt.

m)

$u(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$. Die quadratische Gleichung in Normalform hat die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 5 = 4$. Daher folgt: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$, also x = 5 oder x = 1. Die Nullstellen lauten: 1 und 5.

n)

$v_a(x) = -x^2 + 6x + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - a = 0$. Die quadratische Gleichung in Normalform hat die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 + a = 9 + a$. Für $9 + a < 0 \Leftrightarrow a < -9$ hat die Funktion v_a keine Nullstellen.

o)

$$v(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16x - 2;\ v'(x) = x^2 - 10x + 16;\ v''(x) = 2x - 10; v'''(x) = 2$$

$v'(x) = x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm 3; v'(1) = 7 > 0;\ v'(3) = -5 < 0;\ v'(10) = 16 > 0$: 2 ist lokale Maximum-, 8 lokale Minimumstelle.
[Alternativ: $v''(2) = -6 < 0$: 2 lokale Maximumstelle; $v''(8) = +6 > 0$: 8 lokale Minimumstelle;]

$v''(x) = 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5; v''(4) = -2 < 0; v''(6) = 2 > 0$: 5 ist Rechts-Links-Wendestelle.
[Alternativ: $v'''(5) = 2 > 0$: 5 ReLiPo – Wendestelle]

Aufgabe 2

a)

$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2 - 12 + 18 = 8$. Die Wachstumsgeschwindigkeit betrug zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn acht Zentimeter pro Woche.

b)

Aus dem Graphen kann man ablesen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach vier Wochen 4 cm pro Woche betrug und danach nur noch fällt. Also ist die Pflanze nach fünf Wochen kleiner als 74 cm.

c) $f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$ und $f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 54 - 108 + 54 = 0$.

d) Für f' und f'' gilt: $f'(t) = \frac{3}{4} \cdot t^2 - 6 \cdot t + 9, f''(t) = \frac{3}{2} \cdot t - 6$. Mit $f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 0$ und $f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 6 = -3$ lässt sich folgern, dass 2 lokale Maximumstelle ist. Wegen c) bzw. der Abbildung gilt, dass 2 globale Maximumstelle von f ist. Die Wachstumsgeschwindigkeit wird als nach 2 Wochen maximal.

e)

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{\frac{1}{4}-3+9}{1} = 6{,}25$ cm pro Woche: Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze nimmt in der ersten Woche im Schnitt 6,25 cm pro Woche zu, die mittlere Wachstumsbeschleunigung beträgt in der ersten Woche daher $6{,}25 \frac{\text{cm}}{\text{Woche}^2}$. $'(1) = 3{,}75 \frac{\text{cm}}{\text{Woche}^2}$ beschreibt die momentane Wachstumsbeschleunigung der Pflanze nach 1 Woche.

f)

$f''(t) = \frac{3}{2} \cdot t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Da jede GRF dritten Grades eine Wendestelle hat, ist 4 Wendestelle des Graphen von f. Wegen $f'''(t) = 1{,}5$ ist der Graph rechtslinksgekrümmt. Daher hat der Graph bei $t = 4$ lokal das größte Gefälle. Wegen $f'(0) = 9$ und $f'(6) = \frac{3}{4} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + 9 = 0$ ist die Steigung des Graphen bei $t = 0$ am größten (danach nehmen die Steigungen bis zur Wendestelle ab, um anschließend bis $t = 6$ auf eine Steigung Null zu steigen). Bedeutung im Sachzusammenhang: Bei $t = 4$ ist die Wachstumsbeschleunigung im Beobachtungsintervall am kleinsten. Zu Beginn ist die Wachstumsbeschleunigung am größten.

g)

$f' > 0$ gilt für den Bereich, in dem der Graph steigt. Dies ist im Intervall [0; 2] der Fall. Dort nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit zu. $f'' > 0$ beschreibt den Bereich, bei dem der Graph von f linksgekrümmt ist. Dies ist nach der Wendestelle bei $t = 4$ der Fall. Dort nimmt die Wachstumsbeschleunigung zu.

h)

Die Funktionen f und g besitzen denselben Grad 3, die gleichen Nullstellen und jeweils eine Extremstelle bei $t = 2$. Das globale Maximum ist bei f viermal so groß wie bei g. Der Graph von g geht daher aus dem Graphen von f durch Streckung von der t-Achse aus um den Faktor 0,25 hervor. Es gilt: $g(t) = 0{,}25 \cdot f(t)$. Also: $g(t) = \frac{1}{16} \cdot t^3 - 0{,}75 \cdot t^2 + 2{,}25 \cdot t$. Der Längenzuwachs der ersten Pflanze ist zu jedem Zeitpunkt viermal so groß wie das der zweiten Pflanze, da die Wachstumsgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt viermal so groß ist.

Aufgabe 3

a)

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 12$, $f''(x) = 3x - 12$
$f'(2) = 0 \wedge f''(2) = -6 < 0 \wedge f(2) = 1 \Rightarrow H(2/1)$ ist lokaler Hochpunkt
$f'(4) = 0 \wedge f''(4) = +6 > 0 \wedge f(4) = -1 \Rightarrow T(4/-1)$ ist lokaler Tiefpunkt

b)

$f(x) = (x-3) \cdot (0{,}5x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee 0{,}5x^2 - 3x^2 + 3 = 0$. Die quadratische Gleichung hat die Normalform $x^2 - 6x + 6 = 0$. Die Diskriminante lautet $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 6 = 3$. Daher erhält man neben der Nullstelle x = 3 die exakten Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{3}$.

c)

$f'''(x) = 3$. Es gilt $f''(3) = 0 \wedge f'''(3) = 3 > 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow W(3/0)$ ist ein Rechts-Links-Wendepunkt.

Es gilt ferner für die Steigung der Wendetangente $m_t = f'(3) = 1{,}5 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 12 = -1{,}5$.
Der Punkt W liegt auf der Tangenten: $0 = -1{,}5 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 4{,}5$. Also $t(x) = -1{,}5x + 4{,}5$.

d)

A: Die Aussage ist wahr, da für die Steigung der Geraden gilt: $m = \frac{f(6)-(-1)}{6-4} = 5$.

B: Die Aussage ist falsch, da bei der Wendestelle x = 3 ein lokal minimaler Anstieg vorliegt und daher für x > 3 eine Zunahme der Steigung erfolgen muss. Alternativ: Nach der Wendestelle ist der Graf linksgekrümmt und damit $f'' > 0$, also f' streng monoton zunehmend.

C: Die Aussage ist wahr, da an der Wendestelle x = 3 der Graf von f lokal am steilsten fällt und die Steigung an der Stelle 3 $m_t = f'(3) = -1{,}5$ ist

e)

$g(x) = 2 \cdot f(x)$: Streckung des Grafen von f von der x-Achse aus in y-Richtung um den Faktor 2.

$h(x) = -0{,}5 \cdot f(x)$: Spiegelung des Grafen von f an x-Achse und anschließende Streckung von der x-Achse aus in y-Richtung um den Faktor 0,5.

$k(x) = f(x-1) + 1$: Verschiebung des Grafen von f um 1 Einheit nach rechts und 1 Einheit nach oben.

Aufgabe 4

a)

Mithilfe des GTR (MENU A) erhält man für die Gleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$: $x \approx 0{,}104$.

b)

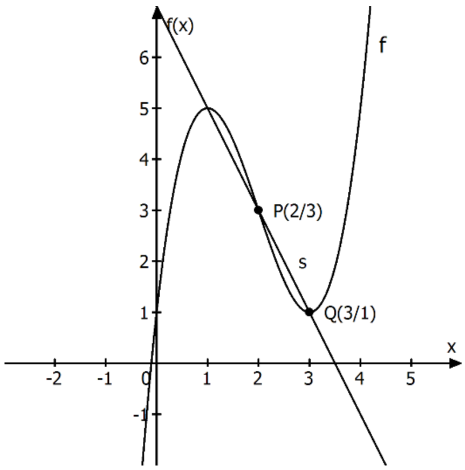
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \xRightarrow[\text{MENU A}]{} x = 1$ oder $x = 3$.

f`(0) = 9; f´(2) = -3; f´(4) = 9; f(1) = 5; f(3) = 1: H(1/5) ist lokaler HP, T(3/1) ist lokaler TP (Hinreichende Bedingung mittels VZW von f´)

Alternativ: $f''(x) = 6x - 12$; f´´(1) = -6; f´´(3) = 6; f(1) = 5; f(3) = 1: H(1/5) ist lokaler HP, T(3/1) ist lokaler TP (Hinreichende Bedingung mittels f´´).

c)

Für die Steigung der Sekanten s gilt: $m = m_{PQ} = \frac{3-1}{2-3} = -2$. Setzt man die Koordinaten des Punktes P in die Gleichung y = -2x + b ein, erhält man die Gleichung: 3 = -2 · 2 + b, also b = 7. Es gilt daher s: y = -2x + 7.

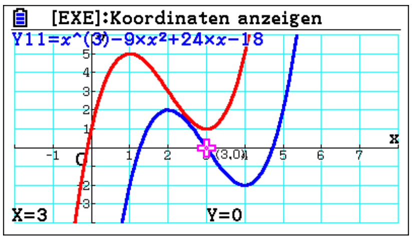


d)

Es handelt sich um die Stelle a = 2. In der Tabelle werden Sekantensteigungen angegeben, die sich der Steigung der Tangente an der Stelle a = 2, d. h. f´(a), nähern. Die Sekanten verlaufen dabei alle durch den Punkt P und einen Punkt Q des Grafen von f, der sich von rechts immer näher an den Punkt P heranbewegt.

e)

Durch Zeichnen des Grafen mithilfe des GTR erkennt man: Wenn der Graf von f um 1 Einheit nach rechts und 3 Einheiten nach unten verschoben wird, erhält man den Grafen von g. Dies erkennt man, indem man zum Beispiel Hoch- und Tiefpunkte bzw. Wendepunkt beider Graphen vergleicht.



f)

$$\begin{aligned} f(x-1) - 3 &= (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 9(x-1) + 1 - 3 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6\left(x^2 - 2x + 1\right) + 9x - 9 - 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6x^2 + 12x - 6 + 9x - 9 - 4 = x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = g(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a)

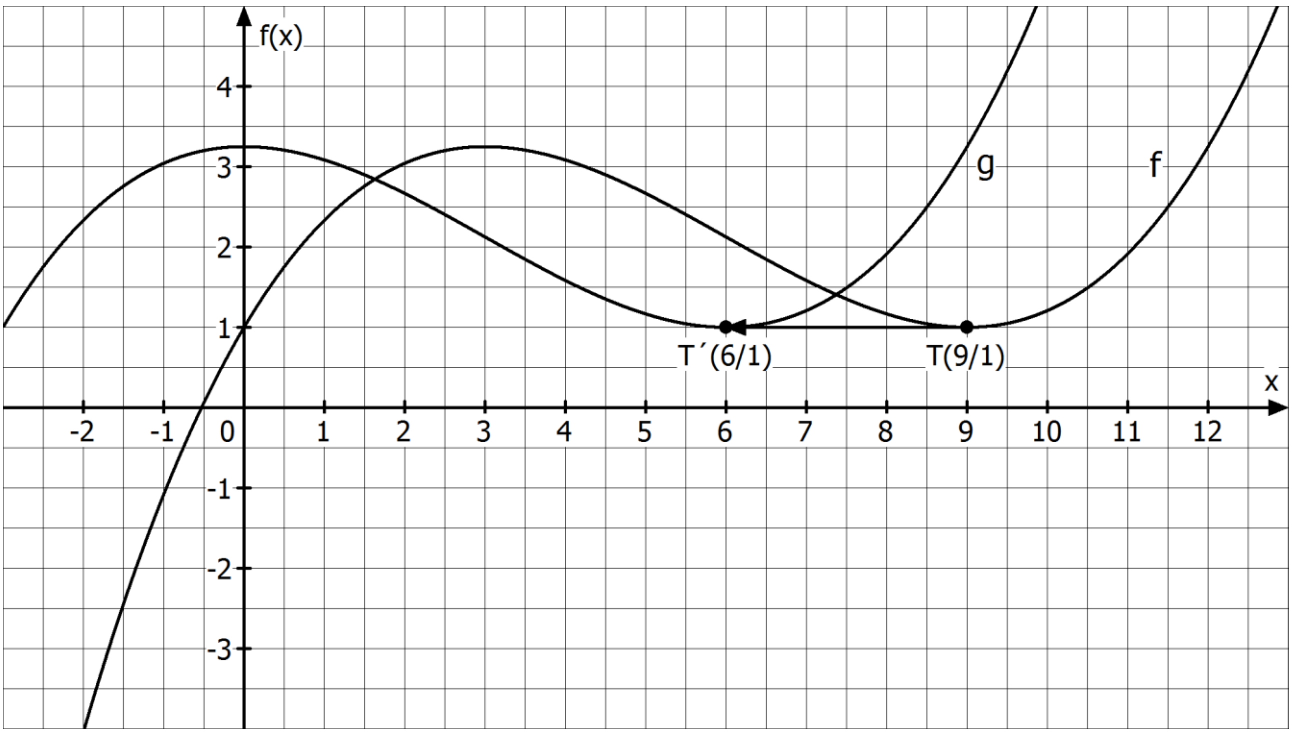
Für die Steigung der Sekanten s gilt: $m = m_{HT} = \frac{1-\frac{13}{4}}{9-3} = -\frac{3}{8}$. Setzt man die Koordinaten des Punktes T(9/1) in die Gleichung $y = -\frac{3}{8}x + b$ ein, erhält man die Gleichung: $1 = -\frac{3}{8} \cdot 9 + b$, also $b = \frac{35}{8}$. Es gilt s: $y = -\frac{3}{8}x + \frac{35}{8}$.

b)

Ansatz: Gesucht sind die Stellen x mit $f'(x) = -\frac{3}{8}$

$f'(x) = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{27}{16} = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{33}{16} = 0 \underset{GTR}{\Longrightarrow} x = 6 - \sqrt{3} \approx 4{,}27 \lor x = 6 + \sqrt{3} \approx 7{,}73$

c) (1)



(2) g(x) = f(x + 3): Wenn man den Grafen von f um 3 Einheiten nach links verschiebt, entsteht der Graf von g.

d)

(1) Abbildung B gehört zum Differenzenquotient $\frac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$.

(2) Der Wert f´(2) beschreibt die Steigung der Tangenten an der Stelle a = 2.

(3) Die Sekantensteigungen der 4 Abbildungen nähern sich der Steigung der Tangenten im Punkt P(2/f(2)) an. Die Sekanten verlaufen dabei alle durch den Punkt P und einen Punkt Q des Grafen von f, der sich von links immer näher an den Punkt P(2/f(2)) heranbewegt. Im Grenzfall gilt dann: $\frac{f(2)-f(x)}{2-x} \underset{x \to 2}{\longrightarrow} f'(2)$. Alternativ kann auch mittels „h-Methode“ argumentiert werden.

Aufgabe 6

a)

(1) f(13) = 1,6. Um 13:00 Uhr ist der Stau 1,6 km lang.
(2) Die Staulänge wird durch eine abgeschätzte durchschnittliche Fahrzeuglänge zuzüglich des durchschnittlichen Fahrzeugabstandes dividiert. Bei der Berücksichtigung von mehreren Spuren kann das Ergebnis für eine Spur mit der Anzahl der Spuren multipliziert werden.

b)

$f'(t) = -0{,}3 \cdot t^2 + 9 \cdot t - 66{,}3$ (und ggf. $f''(t) = -0{,}6 \cdot t + 9$). Mit der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich aus $-0{,}3 \cdot t^2 + 9 \cdot t - 66{,}3 = 0$ die beiden Lösungen t = 13 oder t = 17. Wegen f´(12) = -1,5 < 0 und f´(15) = 1,2 > 0 und f`(18) = -1,5 < 0 liegt bei t = 13 ein VZW von f´ von – nach + und bei 17 von + nach – statt. Daher ist 13 lokale Minimumstelle und 17 lokale Maximumstelle (alternativ f´´(13) = 1,2 > 0 und f´´(17) = -1,2 < 0).

c)

$\frac{f(17)-f(13)}{17-13} = 0{,}8$. Die Staulänge nimmt zwischen 13:00 Uhr und 17:00 Uhr pro Stunde im Durchschnitt um 0,8 km zu.

d)

f´(t) > 0: Der Graph von f hat für 15 < t < 17 eine positive Steigung, die Staulänge nimmt daher zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr.
f´´(t) < 0: Der Graph von f ist rechtsgekrümmt, die Staulänge nimmt daher zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr immer langsamer ab (alternative Argumentation: Die momentane Änderungsrate von f´ ist für 15 < t < 17 negativ).
$f''(t) = -0{,}6 \cdot t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 15$. Mit f´´´(15) = -0,6 ergibt sich eine Links-Rechts-Wendestelle bei t = 15. Randwertvergleich: f´(12) = -1,5, f´(15) = 1,2, f´(19) = -3,6. Die im Intervall [12; 19] globale Maximumstelle von f´ liegt bei t = 15 (um 15:00 Uhr nimmt die Staulänge am schnellsten zu). Die dort global kleinste Steigung liegt bei t = 19 (um 19:00 Uhr nimmt die Staulänge am schnellsten ab).

e)

(1) f(19) = 1,6. Die Staulänge beträgt um 19:00 Uhr 1,6 km. Der Stau hat sich $\frac{1{,}6}{3{,}6} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$ Stunden später, als ungefähr um 19:27 Uhr vollständig aufgelöst.
(2) Da die Staulänge gleichmäßig abnimmt, wird zur Modellierung der Staulänge eine lineare Funktion g mit g(t) = m · t + b verwendet. Die Steigung beträgt m = -3,6, da die Staulänge pro Stunde um 3,6 km abnimmt. Mit g(19) = m · 19 + b = 1,6 folgt b = 70. Damit: g(t) = -3,6 · t + 70 für $19 \leq t \leq 19\frac{4}{9}$.

Aufgabe 7

a)

(1) f(1) = 780. Um 7:00 Uhr sind 780 m³ Wasser im Speicher des Turmes vorhanden. (2) Aus der Bedingung f(t) = 1000 ergeben sich drei Näherungslösungen $t_1 \approx -0{,}75$, $t_2 \approx 0{,}5$ und $t_3 \approx 1{,}25$ (z. B. Schnittpunktberechnung zweier Graphen y = f(x) und y = 1000 in MENU 5). t_1 befindet sich nicht im betrachteten Intervall [0; 1,5]. Ferner gilt f(0) = 1467 > 1000, f(1) = 780 < 1000, f(0) = 1561,5 > 1000. Etwa zwischen 6:00 Uhr und 6:30 Uhr sowie zwischen 7:15 Uhr und 7:30 Uhr liegt die Wassermenge über 1000 m³.

b)

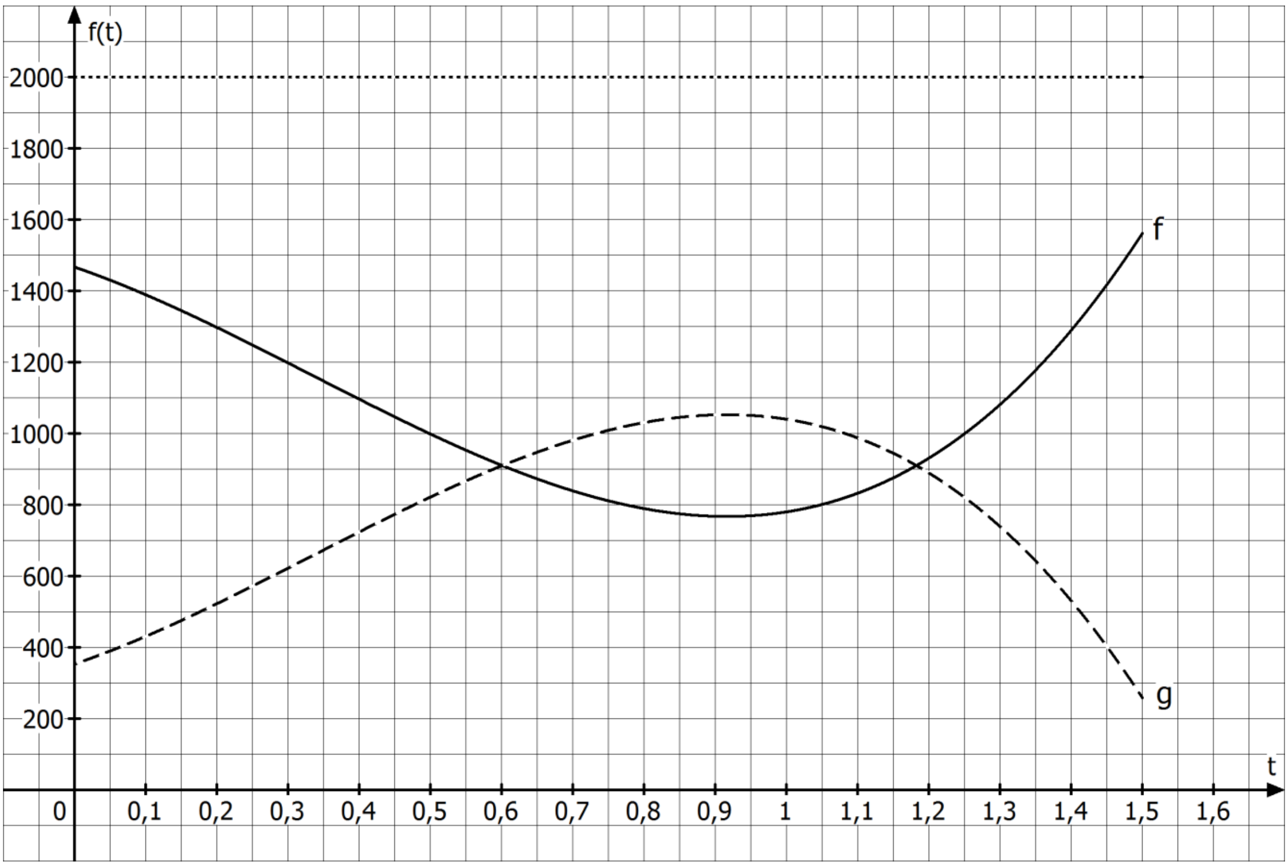
$f'(t) = 3000 \cdot t^2 - 2000 \cdot t - 687$. Aus der notwendigen Bedingung f´(t) = 0 ergeben sich mit dem GTR die beiden Näherungslösungen $t_1 \approx -0{,}25$ und $t_2 \approx 0{,}92$. t_1 befindet sich nicht im Intervall [0; 1.5]. Es gilt: f´(0,9) = -57 < 0 und f´(1) = 313 > 0 weist auf einen VZW von f´ von – nach + hin. Daher ist t_2 lokale Minimumstelle von f. Ein Vergleich von f(0,92) ≈ 767,25 mit den Randwerten f(0) = 1467 und f(1,5) = 1561,5 beweist, dass um ca. 6:55 Uhr mit 767,25 m³ eine minimale Wassermenge vorliegt, die ca. 232,75 m³ unter dem Sollwert liegt.

c)

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -687$. Die Wassermenge im Speicher des Turmes nimmt zwischen 6:00 Uhr und 7:00 Uhr durchschnittlich mit einer Rate von 687 m³ ab. Es gilt f´(1) = 313. Die Wassermenge des Turmes nimmt um 7:00 Uhr mit einer momentanen Änderungsrate von 313 m³ pro Stunde zu.

d)

(2) Es gilt f(t) + g(t) = 2000. Also gilt g(t) = 2000 – f(t). Die Funktionswerte der Funktion g zeigen daher, wie viel m³ Wasser noch im Speicher des Wasserturmes aufgenommen werden können.



Aufgabe 8

a)

Man liest an der Stelle t = -5 den Wert 20 Grad ab. Im Zeitraum von 9:00 Uhr bis 15:00 Uhr (t = -3 bis t = 3) misst Heinz einen Sonnenhöhenwinkel von mindestens 30 Grad.

b)

Der Funktionswert an der Stelle -5 beträgt f(-5) = 21,2675. Daher beträgt die Abweichung vom Messwert 1,2625 Grad.

c)

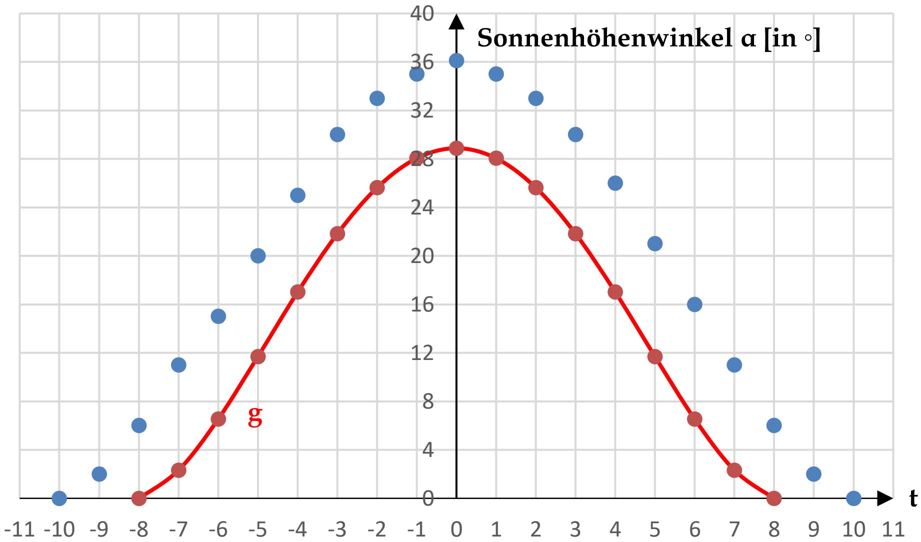
$f'(t) = 0{,}0124t^3 - 1{,}342t = 0 \underset{\text{GTR}}{\Longleftrightarrow} t \approx \pm 10{,}4$ (nicht im Definitonsbereich von f) $\vee\ t = 0$. Nun gilt: $f'(1) = -1{,}3296 < 0; f'(-1) = 1{,}3296 > 0;\ f(-10) = f(10) = 0; f(0) = 36{,}1 \Rightarrow$ Die Funktion f nimmt an der Stelle 0 sein globales Maximum an, q. e. d.

d)

(1) $f'(-9) = 0{,}0124 \cdot (-9)^3 - 1{,}342 \cdot (-9) = 3{,}0384 > 2{,}5848 = f'(-2)$

(2) Der positive momentane Änderungsrate $f'(-9)$ ist größer als die positive momentane Änderungsrate $f'(-2)$. Der Sonnenhöhenwinkel nimmt als um 3:00 Uhr morgens schneller zu als um 10:00 Uhr morgens.

e) (1)



(2)

Berechnung von b: Da die Sonne bei der Modellierung mit der Funktion g um 4:00 Uhr morgens aufgeht, gilt: $g(-8) = a \cdot f\big(b \cdot (-8)\big) = 0$. Wegen $a \neq 0$, folgt $f(-8b) = 0$. Da unter der Modellfunktion f der Sonnenaufgang um 2:00 Uhr morgens war, folgt: $-8b = -10 \Leftrightarrow b = 1{,}25$.

Berechnung von a: Es gilt für t = 0: $g(0) = a \cdot f(0) \Leftrightarrow a = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{29}{36{,}1} \approx 0{,}8$.