Vorbereitung auf die ZK Mathematik

Ohne Hilfsmittel

Stufe 1	**Stufe 2**	**Stufe 3**	**Stufe 4**

Stochastik

In einer Urne sind 4 rote und 6 weiße Kugeln.

1 Gib die Wahrscheinlichkeit an, a) eine rote, b) eine weiße Kugel zu ziehen.	**2** Es wird zweimal eine Kugel gezogen, wobei die erste Kugel zurückgelegt wird. Berechne die Wahrscheinlichkeit a) 2 rote Kugeln, b) 1 weiße und 1 rote Kugel zu ziehen.	**3** Es wird zweimal eine Kugel gezogen, wobei die erste Kugel nicht zurückgelegt wird. Berechne die Wahrscheinlichkeit a) 2 rote Kugeln, b) 1 weiße und 1 rote Kugel zu ziehen	**4** Eine Kugel wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Ein Spieler zahlt 4 € Einsatz. Er bekommt nur bei 2 x rot einen Betrag ausgezahlt. Für welchen Auszahlungsbetrag ist das Spiel fair?

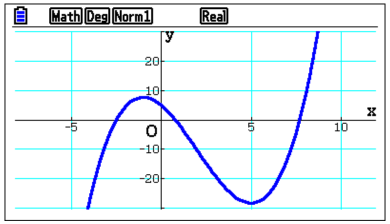
60 % der Oberstufenschüler männlich. Jeder fünfte männliche Oberstufenschüler ist ein Raucher. Von allen weiblichen Oberstufenschülern rauchen 10%.

1 Erstelle eine beschriftetes Baumdiagramm zu dargestellten Situation.	**2** Berechne, wie viel Prozent der Oberstufenschüler männliche Raucher sind.	**3** Berechne, wie viel Prozent der Oberstufenschüler Nichtraucher sind.	**4** Berechne, wie viel Prozent der Raucher weiblich sind.

Analysis

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, g mit $g(x) = (x+4)\cdot(x^2 - 0{,}04)^2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$ und h mit $h(x) = x^2 + 2x + a$ mit der reellen Zahl a.

1 Zeige, dass – 5 eine Nullstelle von f ist.	**2** Berechne alle Nullstellen von f.	**3** Bestimme alle Nullstellen von g.	**4** Untersuche, für welche a die Funktion h genau zwei Nullstelen hat.



Sei f gegeben mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 5$. Der Graf ist rechts angegeben.

1 Zeige, dass $f'(5) = 0$ und $f'(-2) = 7$	**2** Berechne die lokalen Extremstellen.	**3** Zeige, dass der Graf von f zwischen -1 und 5 streng monoton fallend ist.	**4** Skizziere den Grafen von f´ in die obige Abbildung
1 Gib die Tangente an den Grafen von f an der Stelle Null an [Tipp: Vergleichsfunktion nahe Null].	**2** Gib eine Gleichung einer GRF dritten Grades an, die von oben links nach unten rechts verläuft und durch (0/6) geht.	**3** Berechne die Gleichung der Tangente an den Grafen von f an der Stelle 1.	**4** Bestimme die Tangente an den Grafen von f mit Steigung -5 und positivem y-Achsenabschnitt. Stelle sie grafisch dar.

Vorbereitung auf die ZK Mathematik

Mit Hilfsmitteln

Stufe I	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4

Analysis ohne Sachkontext

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1 Bestimme f(2).	**2** Bestimme alle Nullstellen von f.	**3** Bestimme die x-Bereiche des Grafen von f mit positiven Funktionswerten.	**4** Bestimme die x-Bereiche, an denen der Graf von f Funktionswerte hat, die größer als 20 sind.
1 Bestimme f´(2).	**2** Bestimme alle lokalen Extrempunkte des Grafen von f.	**3** Bestimme alle Punkte des Grafen, in denen er die Steigung 1 hat.	**4** Bestimme Gleichungen der Tangenten an den Grafen von f mit Steigung 1.

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 - x$. Verwende zur Darstellung der Funktionen zu g beim GTR das MENU 6 (Dynamischer Graf), gib die Funktionsgleichung ein und definiere dort die Parameter A, B, C und D (über VAR und SET mit Startwert -5 und Zielwert 5 und Schrittweite 1).

1 Die Funktion g sei definiert durch die Gleichung $g(x) = f(x) + D$, wobei d eine beliebige reelle Zahl ist. Beschreibe, wie der Graf von g aus dem Grafen von f hervorgeht.	**2** Die Funktion g sei definiert durch die Gleichung $g(x) = A \cdot f(x)$, wobei A eine beliebige reelle Zahl ist. Beschreibe, wie der Graf von g aus dem Grafen von f hervorgeht.	**3** Die Funktion g sei definiert durch die Gleichung $g(x) = f(x - C)$, wobei C eine beliebige reelle Zahl ist. Beschreibe, wie der Graf von g aus dem Grafen von f hervorgeht.	**4** Die Funktion g sei definiert durch die Gleichung $g(x) = f(B \cdot x)$, wobei B eine beliebige reelle Zahl ist. Beschreibe, wie der Graf von g aus dem Grafen von f hervorgeht.

Analysis mit Sachkontext

Sei f gegeben mit $f(x) = -0{,}08x^3 + 0{,}6324x^2 + 0{,}54432x + 8$. Die Funktion f beschreibt für $0 \leq x \leq 6$ die Zeitspanne vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang (kurz: Tageslänge). In der Modellierung wird ein Monat mit 30 Tagen angesetzt. Dabei ist x = 0 der 1. Januar 2017 und x = $\frac{1}{30}$ dem 2. Januar 2017 und x = 1 der 1. Februar 2017 usw.

1 Bestimme f(3) und deute den Wert im Sachkontext.	**2** Ermittle die Tageslänge vom 16.04.17.	**3** Ermittle den Zeitpunkt im ersten Halbjahr von 2017, an dem die Tageslänge12 Stunden beträgt.	**4** Bestimme die Zeitspanne im ersten Halbjahr von 2017, für den die Tageslänge länger als 10 Stunden beträgt.
1 Bestimme $f(4) - f(2)$ und interpretiere seinen Wert im Sachkontext.	**2** Bestimme $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$ und deute den Wert im Sachkontext.	**3** Ermittle die durchschnittliche Zunahme der Tageslänge im Zeitraum vom 1. Februar bis 1. April 2017.	**4** Ermittle die Zeitpunkte zwischen dem 1.3.17 und 1.5.17, an dem die momentane Zunahme der Tageslänge der durchschnittlichen Zunahme der Tageslänge vom 1.3. bis 1.5.17 entspricht.
1 Gib f´(x) an.	**2** Bestimme f´(2) und deute den Wert im Sachkontext.	**3** Bestimme die momentane Zunahme der Tageslänge am 16. Februar 2017.	**4** Ermittle die Zeitpunkte, an denen die momentane Zunahme der Tageslänge 2 Stunden pro Monat beträgt.
1 Zeige, dass $f'\left(5\frac{2}{3}\right) = 0$ gilt und deute dies im Sachkontext.	**2** Zeige, dass f´(5) > 0 und f´(6) < 0 gilt und deute dies zusammen mit **1** im Sachkontext.	**3** Zeige, dass die Tageslängen vom 1.1.17 bis zum 21.6.17 immer länger werden.	**4** Entscheide begründend, ob die Funktion f die Tageslängen für das komplette Jahr 2017 modellieren kann.

Vorbereitung auf die ZK Mathematik

Ohne Hilfsmittel

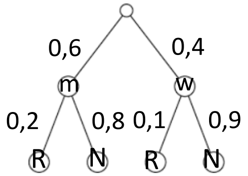
Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4

Stochastik

In einer Urne sind 4 rote und 6 weiße Kugeln.

1 a) $P(\text{rote Kugel}) = 40\ \%$ b) $P(\text{weiße Kugel}) = 60\ \%$	**2** a) $P(\text{rot, rot}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 16\ \%$ b) $P(\text{rot, weiß und weiß, rot})$ $= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 48\ \%$	**3** a) $P(\text{rot, rot}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$ b) $P(\text{rot, weiß und weiß, rot})$ $= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$	**4** Bei 4 € Einsatz soll der Auszahlungsbetrag bei zweimal rot x € betragen. Ist das Spiel fair, gilt 0,16 · x + 0,84 · 0 = 4. Also folgt x = 25 €.

60 % der Oberstufenschüler männlich. Jeder fünfte männliche Oberstufenschüler ist ein Raucher. Von allen weiblichen Oberstufenschülern rauchen 10%.

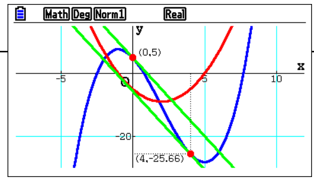
1 	**2** $P(m \cap R) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12 = 12\ \%$	**3** $P(N) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9$ $= 0{,}48 + 0{,}36 = 0{,}84 = 84\ \%$	**4** $P_R(w) = \frac{P(R \cap w)}{\text{P®}} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1}{1 - P(N)} = \frac{0{,}04}{0{,}16}$ $= 25\ \%$

Analysis

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, g mit $g(x) = (x+4) \cdot (x^2 - 0{,}04)^2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$ und h mit $h(x) = x^2 + 2x + a$ mit der reellen Zahl a.

1 $f(-5) = (-5)^3 + 4(-5)^2 - 5(-5)$ = -125 + 100 + 25 = 0.	**2** $f(x) = x(x^2 + 4x - 5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 4x - 5 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \vee x = 1$	**3** $(x+4) \cdot (x^2 - 0{,}04)^2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$ $\Leftrightarrow x = -4 \vee x^2 = 0{,}04 \vee x^2 = 0{,}25$ $\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 0{,}02 \vee x = 0{,}5$	**4** $x^2 + 2x + a = 0$ $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Es gibt zwei Nullstellen, wenn $1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1$.

Sei f gegeben mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 5$. Der Graf ist rechts angegeben.

1 $f'(x) = x^2 - 4x - 5 \Leftrightarrow f'(5) = 25 - 20 + 5 = 0$; $f'(-2) = 4 + 8 - 5 = 7$	**4** $f'(x) = x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm 3$ $f'(-2) > 0, f'(0) = -5 < 0$; $f'(6) = 7 > 0$: -1 ist lokale Maximumstelle, 5 ist lokale Minimumstelle.	**3** Die Ableitung wechselt bei -1 das VZ von + nach – und bei 5 von – nach +. Daher ist der Graf über [-1; 5] streng monoton fallend.	**4** 
1 t(x) -5x – 5.	**2** Zum Beispiel: $f(x) = -x^3 + 6$	**3** Die Tangente hat die Steigung $m = f'(1) = -8$ und geht durch $(1/-\frac{5}{3})$. Daher gilt $-\frac{5}{3} = -8 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 6\frac{1}{3}$. Also: $t(x) = -8 \cdot x + 6\frac{1}{3}$	**4** $x^2 - 4x - 5 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$. Gesucht ist die Tangente an der Stelle 0, da die andere Tangente negativen y-Achsenabschnitt hätte: $t(x) = -5 \cdot x + 5$.

Vorbereitung auf die ZK Mathematik

Mit Hilfsmitteln

Stufe I	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4

Analysis ohne Sachkontext

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1 $f(2) = 0$	**2** $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ $\underset{GTR}{\Longrightarrow} x = -4 \lor x = 2 \lor x = 3$	**3** Da der Graf von links unten nach rechts oben verläuft und -4, 2 und 3 Nullstellen sind, gilt: $f(x) > 0$ für $-4 < x < 2$ und $x > 3$.	**4** $f(x) = 20 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx -3{,}43 \lor x \approx 0{,}28 \lor x \approx 4{,}14$. Es gilt: $f(x) > 20$ für $-3{,}43 < x < 0{,}28$ und für $x > 4{,}14$
1 $f'(2) = -6$	**2** $f'(x) = 3x^2 - 2x - 14 = 0$ $\underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx -1{,}85 \lor x \approx 2{,}51$. H(-1,85/40) und T(2,52/-1,63)	**3** $f'(x) = 3x^2 - 2x - 14 = 1$ $\underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1+\sqrt{46}}{3} \approx -1{,}927 \lor x = \frac{1+\sqrt{46}}{3} \approx 2{,}594$	**4** $x \approx -1{,}97 \xrightarrow[\text{GTR (Sketch)}]{} t(x) \approx x + 42{,}04$ $x \approx 2{,}59 \xrightarrow[\text{GTR (Sketch)}]{} t(x) \approx x + 4{,}18$

Sei f gegeben mit $f(x) = x^3 - x$. Verwende zur Darstellung der Funktionen zu g beim GTR das MENU 6 (Dynamischer Graf), gib die Funktionsgleichung ein und definiere dort die Parameter a, b, c und d (über VAR und SET mit Startwert -5 und Zielwert 5 und Schrittweite 1).

1 $g(x) = f(x) + d$: Der Parameter d verschiebt den Grafen von f um d Einheiten nach oben (d > 0) oder um d Einheiten nach unten (d < 0) (Verschiebung in y-Richtung)	**2** $g(x) = a \cdot f(x)$ Der Parameter a streckt (a > 1 und a < -1) und staucht (-1 < a < 0 und 0 < a < 0) den Grafen von f in y-Richtung (Streckung / Stauchung in y-Richtung).	**3** $g(x) = f(x - c)$: Der Parameter c verschiebt den Grafen von f um c Einheiten nach rechts (c > 0) bzw. um c Einheiten nach links (c < 0) (Verschiebung in x-Richtung).	**4** $g(x) = f(b \cdot x)$: Der Parameter b streckt (0 < b < 1 bzw. -1 < b < 0) oder staucht (b > 1 bzw. b < -1) den Grafen von f in x-Richtung (Streckung / Stauchung in x-Richtung).

Analysis mit Sachkontext

Sei f gegeben mit $f(x) = -0{,}08x^3 + 0{,}6324x^2 + 0{,}54432x + 8$. Die Funktion f beschreibt für $0 \leq x \leq 6$ die Zeitspanne vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang (kurz: Tageslänge). In der Modellierung wird ein Monat mit 30 Tagen angesetzt. Dabei ist x = 0 der 1. Januar 2017 und $x = \frac{1}{30}$ dem 2. Januar 2017 und x = 1 der 1. Februar 2017 usw.

1 $f(3) \approx 13{,}16$ gibt die Tageslänge am 1. April 2017 an,	**2** $f(3{,}5) \approx 14{,}22$	**3** $f(x) = 12 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 2{,}47$. Am 15. März beträgt die Tageslänge 12 Stunden.	**4** $f(x) = 10 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 1{,}52$.. Tagesdauer > 12 im 1. Halbjahr: 16.02.17 bis 01.07.17.
1 $f(4) - f(2) \approx 15{,}18 - 10{,}98 = 4{,}2$. Die Zunahme der Tageslänge vom 1.3.17 zum 1.5.17 beträgt 4,2 Stunden.	**2** $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx 2{,}1$ ist die durchschnittliche Zunahme des Tageslänge pro Monat im Zeitraum vom 1.3.17 bis zum 1.5.17.	**3** $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} \approx \frac{13{,}16-9{,}10}{2} = 2{,}03$ Stunden pro Monat.	**4** $f'(x) = 2{,}1 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 1{,}96 \lor x \approx 3.31$ Ende Februar/Anfang März und am 10. Mai beträgt die momentane Zunahme der Tageslänge 2,1 Stunden pro Monat.
1 $f'(x) = -0{,}24x^2 + 1{,}2348x + 0{,}54432$.	**2** $f'(2) \approx 2{,}11$ beschreibt die momentane Zunahme der Tageslänge am 1.3.17.	**3** $f'\left(1\frac{1}{3}\right) \approx 1{,}80$.Stunden pro Monat.	**4** $f'(x) = 2 \underset{GTR}{\Longleftrightarrow} x \approx 1{,}69$ (22.2.17) $\lor\, x \approx 3.57$ (18.4.17)
1 $f'\left(5\frac{2}{3}\right) = 0$ (mit GTR)	**2** $f'(5) \approx 0{,}87 > 0$ und $f'(6) \approx -0{,}51 < 0$ und $f'\left(5\frac{2}{3}\right) = 0$: $5\frac{2}{3}$ ist lokale Maximumstelle	**3** Der Graf der Funktion f steigt von x = 0 (1.1.17) bis zum Maximum bei $5\frac{2}{3}$ (21.6.17) an, da $f'(x) > 0$ für $0{,}4 < x < 5\frac{2}{3}$.	**4** Die Funktion f ist nicht geeignet, da sie im Intervall [0;12] negativ wird, es gilt: $f(x) < 0$ für $x > 9{,}67$.