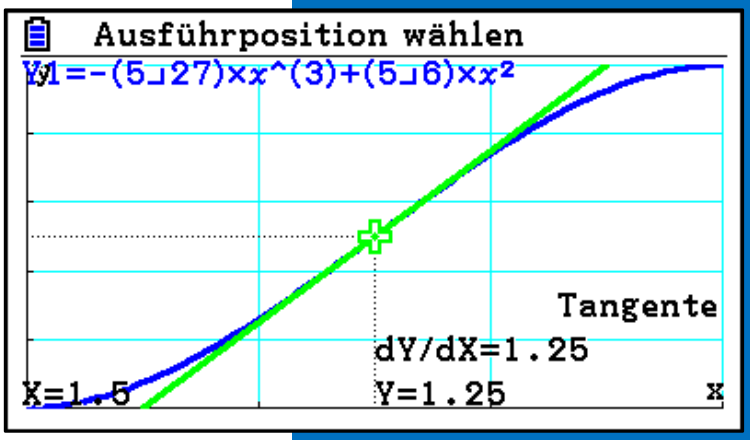
2. Unterrichtsvorhaben
in der E-Phase

Änderungsraten und Ableitung



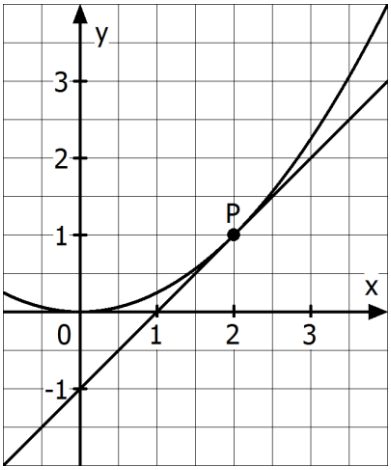
Jörn Meyer
j.meyer@fals-solingen.de
www.maspole.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Differenzialrechnung 2
2 Mittlere Änderungsraten 4
3 Momentane Änderungsraten 7
4 Ableitungsregeln und höhere Ableitungen 17
5 Kontrollaufgaben 19
Lösungen 23

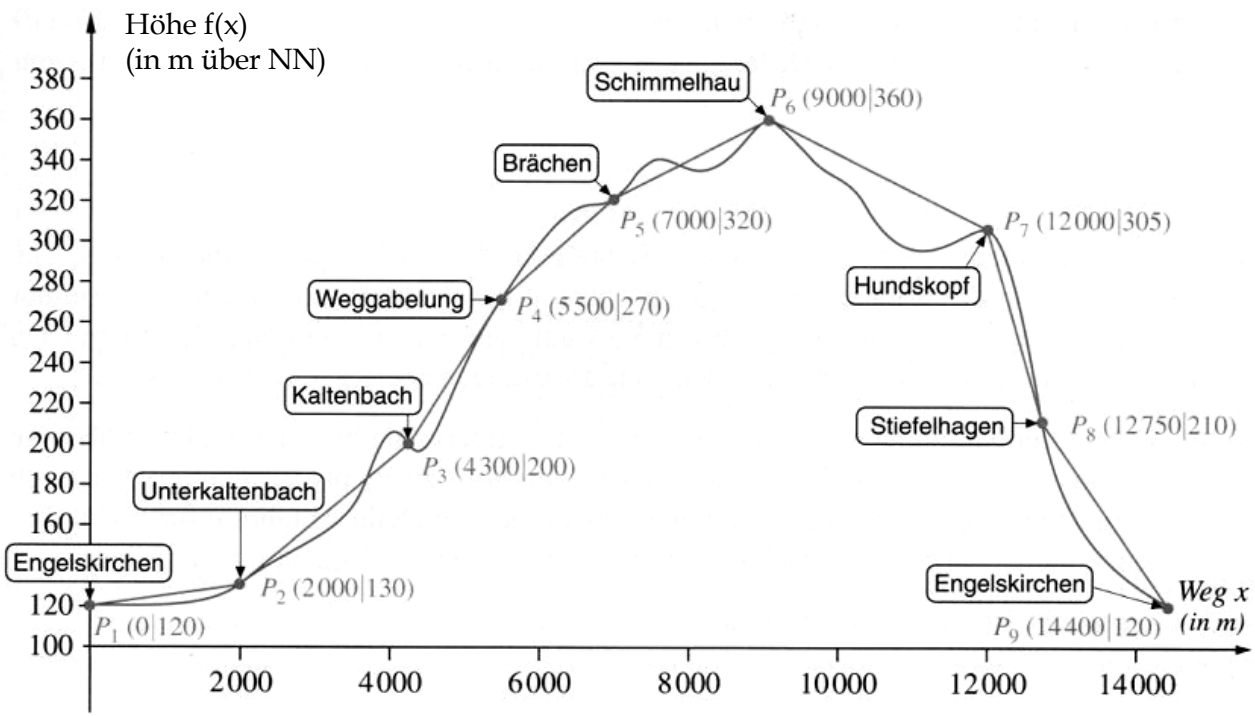
1 Einführung in die Differenzialrechnung

Die Differenzialrechnung beschäftigt sich mit Änderungen bei funktionalen Verläufen. Die Begründer der Differenzialrechnung waren die beiden Mathematiker **Isaac Newton** (1642 – 1727) und **Gottfried Wilhelm Leibnitz** (1646 – 1716). Beide Mathematiker haben unabhängig voneinander eigenständige Formen der Differenzialrechnung gefunden. Während Newton stärker den physikalischen Zusammenhang von Weg-Zeit-Funktion und Geschwindigkeits-Zeit-Funktion im Blick hielt, richtete Leibnitz seinen Fokus auf innermathematische Betrachtung wie das sogenannte „Tagentenproblem". Das **Tangentenproblem** stellt ein Grundproblem der Differenzialrechnung dar, bei dem die Steigung der Tangenten an einen Graphen einer Funktion f an einer bestimmte Stelle x_0 bestimmt werden soll (vgl. Abb. rechts).



Im Folgenden sind zwei Beispiele angegeben, die zum zentralen Begriff der **Änderungsrate** führen. Im **innermathematischen Bezug** spricht man von **Steigungen** (Beispiel 1), bei **zeitlichen Verläufen** (Beispiel 1) von **Geschwindigkeiten.** Kannst Du einige der folgenden Fragen beantworten?

1. Beispiel: Steigung im Gelände – Höhenprofile[1]

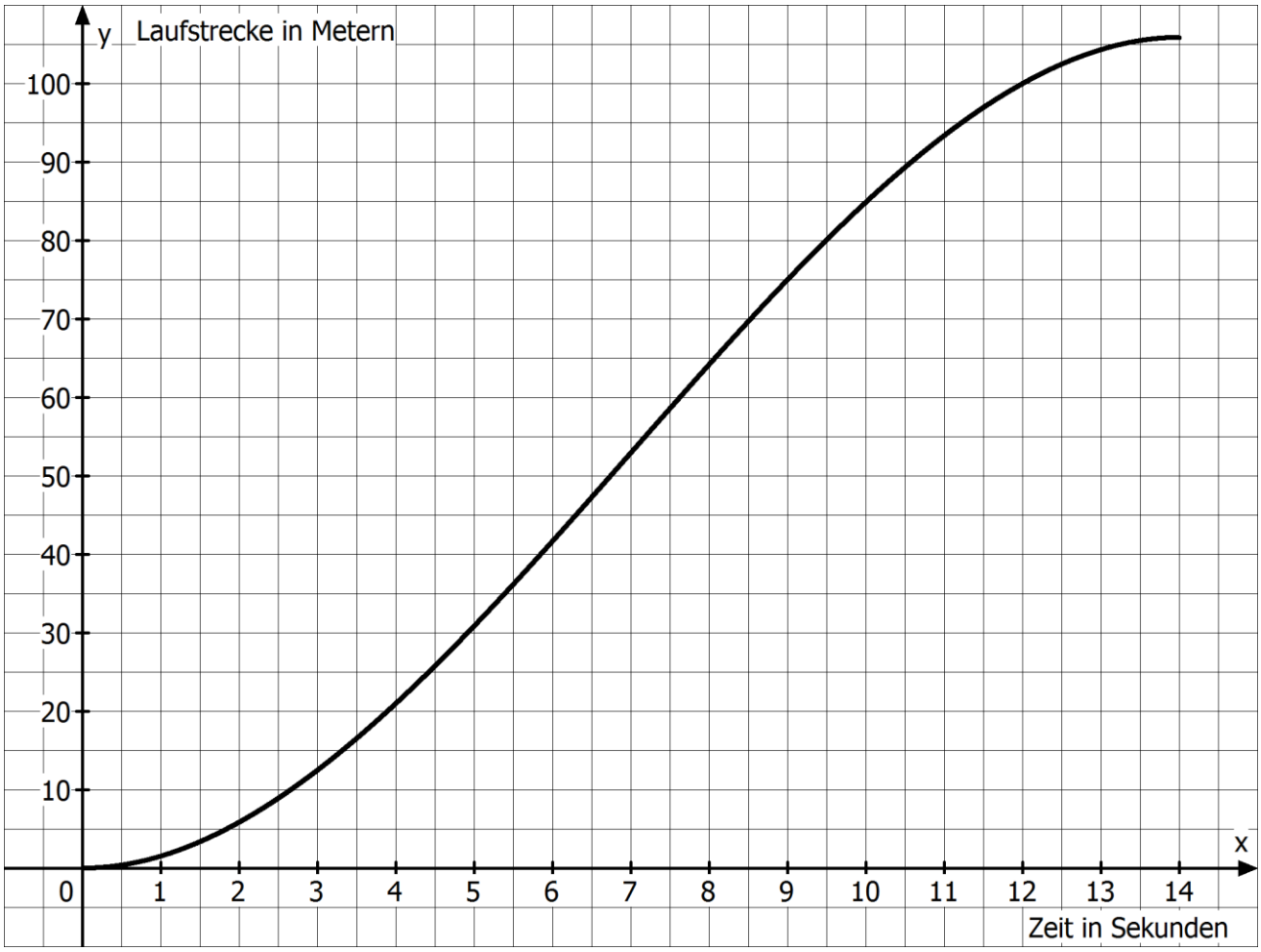


a) Welche Höhe wird zwischen den Punkten P_2 und P_3 zurückgelegt?
b) Zwischen welchen Punkten wird die größte Höhe zurückgelegt?
c) Wie groß ist der mittlere Anstieg zwischen Brächen und Schimmelhau?
d) Zwischen welchen Wegpunkten befindet sich der größte Anstieg (das größte Gefälle)?
e) An welcher Stelle ist das Gefälle (der Anstieg) am steilsten (stärksten)?

[1] Abbildung stammt aus „Mathematik 11. Schuljahr", Cornelsen, (2000)

2. Beispiel: 100m-Sprint

Der Sport-Leistungskurs modelliert auf der Basis von Zwischenzeiten den 100-m-Lauf eines Schülers mithilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Der Graph ist im Folgenden dargestellt.



a) Welche Leistungsstärke hat der 100m-Läufer?
b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke?
c) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit zwischen der 3. und 5. Sekunde?
d) Welche Geschwindigkeit hat der Läufer nach 4 Sekunden?
e) Wann erreicht der Läufer seine maximale Geschwindigkeit?

Lösungen:

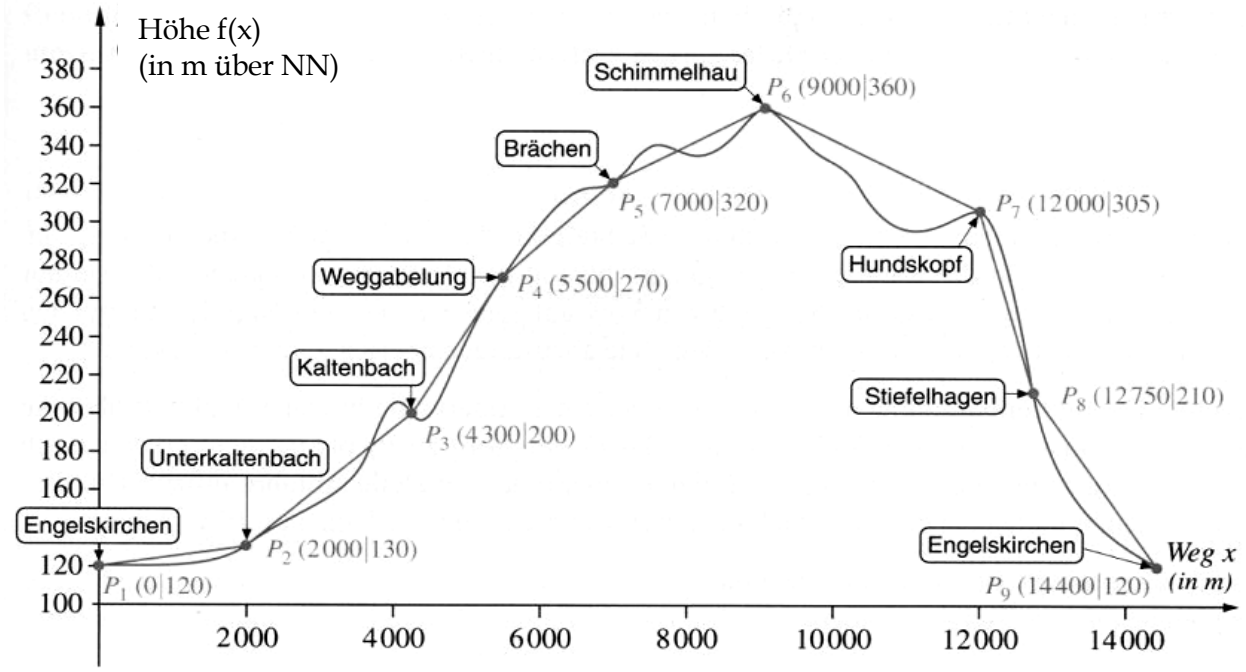
1a) 200 m – 130 m = 70 m 1b) 210 m – 305 m = -95 m
1c) $m_{[P_7;P_8]} = \frac{360-320}{9000-7000} = 0{,}02 = 2\%$ 1d) $m_{[P_3;P_4]} = \frac{270-200}{5500-4300} = \frac{70}{1200} \approx 5{,}83\%$
1e) Stärkstes Gefälle: kurz vor Stiefelhagen, stärkster Anstieg kurz vor Kaltenbach.

2a) ca. 12 Sekunden (flott für einen Lk-Schüler) 2b) $v_{[0;12]} = \frac{100\,m}{12\,s} = 8\frac{1}{3}\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{km}{h}$
2c) $v_{[3;5]} = \frac{20\,m}{2\,s} = 10\,\frac{m}{s} = 36\,\frac{km}{h}$ 2d) ca. $10\,\frac{m}{s}$
2e) Dort, wo der Graph am steilsten ist (nach 7 Sekunden)

2 Mittlere Änderungsraten

Aufgabe 1 (Radtour oder Wanderung?)[2]

Von Engelskirchen aus möchte eine Gruppe von Schülern eine Fahrradtour machen. Jedoch hat eine Schülerin Bedenken, ob sie nicht zu oft an steilen Stellen absteigen und das Fahrrad schieben muss, da sie eine ungeübte Radfahrerin ist. Sie würde daher lieber wandern. Ihre Mitschüler planen nun eine Route, die ihrer Meinung nach trotzdem geeignet ist (siehe Abb. rechts). Auf dieser Route markieren sie markante Stellen wie Dörfer, Abzweigungen oder Hochpunkte und erstellen aus der topografischen Karte ein ungefähres Höhenprofil der Strecke (siehe Abb. unten).



a) Folgende Tabelle kann euch bei der Beantwortung der Aufgaben b) bis e) helfen. **Fülle** sie **aus**.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
Entfernung x_0 vom Startpunkt P_1	0	2000	4300						
Entfernung h zwischen zwei Nachbarpunkten	2000	2300							
Höhe $f(x_0)$ über NN	120	130	200						
Höhenunterschied $f(x_0 + h) - f(x_0)$	10	70							
$\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Entfernung}}$	0,5%	3,04%							

b) **Gib** den größten Höhenunterschied zwischen zwei Stationen **an**.

c) Zwischen Unterkaltenbach und Kaltenbach bzw. zwischen Kaltenbach und der Weggabelung müssen jeweils 70 Höhenmeter überwunden werden.

Begründe, warum die Strecken nicht gleich anstrengend sind.

[2] Abbildungen und Aufgabenidee stammt aus „Mathematik 11. Schuljahr“, Cornelsen, (2000)

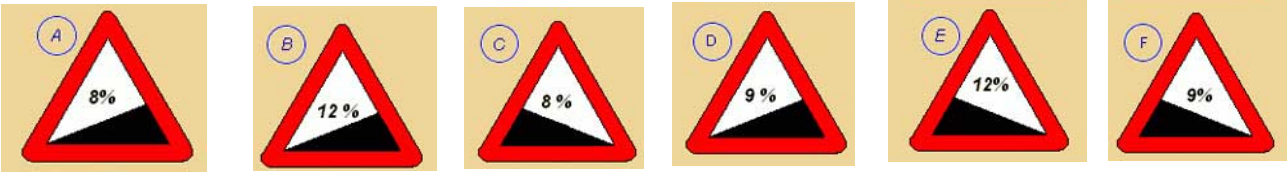
d) **Erläutere**, wie man trotz der unterschiedlichen Längen der Strecken zwischen zwei Nachbarpunkten anhand der Zeichnung und mithilfe einer Rechnung erkennen kann, wie anstrengend ein Abschnitt ist. **Gib an**, wo es am anstrengendsten.

e) **Gib** die Bedeutung von $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ im obigen Sachkontext **an**.

f) **Begründe,** warum trotz der bisherigen Ergebnisse eine Wanderung für eine Schulklasse angemessener sein könnte.

g) Folgende Schilder stehen am Rand der Strecke.

Markiere im Höhenprofil, an welchen Stellen die Schilder auftauchen können. **Begründe** deine Markierungen.

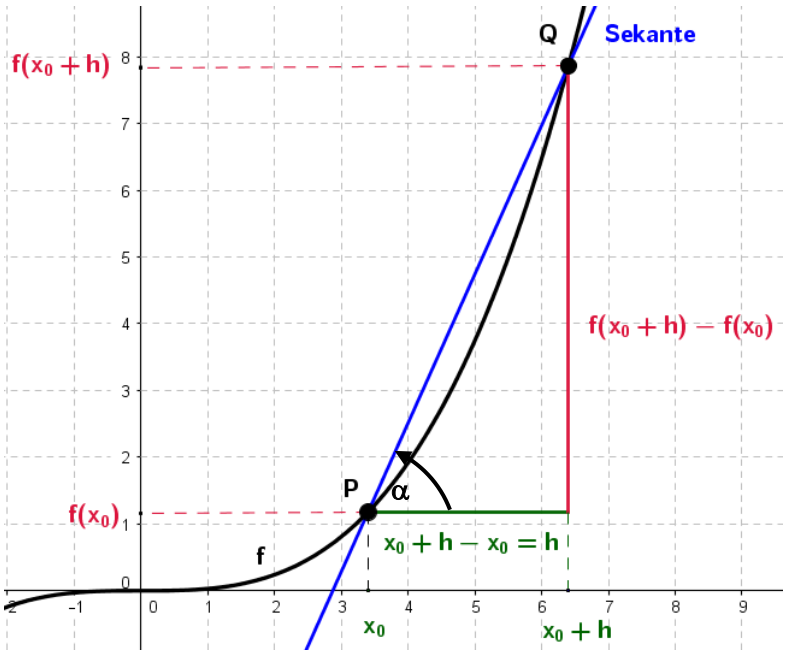


h) **Ermittle** für Schilder A und E die Steigung und den dazugehörigen Steigungswinkel.

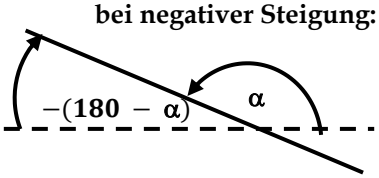
Definition: Ist eine Funktion f auf einem Intervall $[x_0; x_0 + h]$ definiert, dann kann man mit dem sogenannten **Differenzenquotienten** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P(x_0/f(x_0))$ und $Q(x_0 + h/f(x_0 + h))$ berechnen.

Diese entspricht in Anwendungssituation allgemein der **mittleren Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_0 + h]$.** Bei zeitlichen Verläufen spricht man speziell von einer **mittleren Geschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0; x_0 + h]$.**

Man nennt den Winkel α im Steigungsdreieck den **Steigungswinkel**. Er berechnet sich durch $\tan(\alpha) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und damit gilt: $\boldsymbol{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}$.



Steigungswinkel bei negativer Steigung:

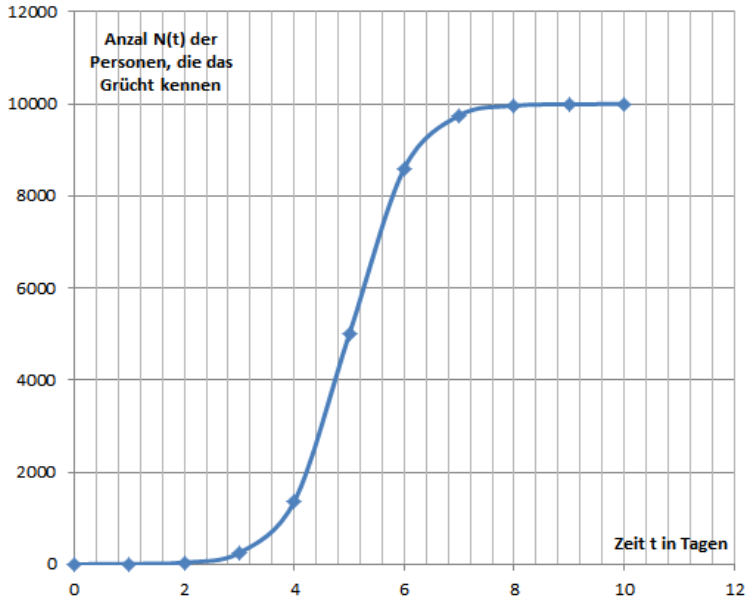


Merke: Der GTR gibt bei negativen Steigungen als Steigungswinkel entweder den positiven stumpfen Winkel α an oder den negativen Nebenwinkel von α.

Aufgabe 2 (Verbreitung eines Gerüchts)

In einer niederländischen Kleinstadt verbreitet sich unter 10000 Menschen ein Gerücht. Der zeitliche Verlauf der Verbreitung unter den Menschen ist in der nachfolgenden Tabelle bzw. im nachfolgenden Diagramm dargestellt. Dabei sei t die Zeit in Tagen und N(t) die Anzahl der Personen, die das Gerücht **insgesamt** kennen.

Zeit t in Tagen	Anzahl der Personen N(t), die das Gerücht kennen
0	1
1	10
2	40
3	250
4	1370
5	5000
6	8600
7	9750
8	9960
9	9990
10	10000



a) **Gib an**, wie viele Menschen das Gerücht am dritten Tag **zum ersten Mal** gehört haben und **untersuche**, an welchem Tag die meisten Menschen das Gerücht **erstmals** hören.

b) **Berechne** die mittlere Änderungsrate von N im Zeitintervall [3; 5] sowie die mittlere Geschwindigkeit, mit der sich das Gerücht vom zweiten bis zum vierten Tag ändert.

c) **Begründe**, in welchem der Zeitintervalle [0; 1], [1; 2], ... , [9; 10] die mittlere Verbreitungsgeschwindigkeit am größten ist.

d) **Bestimme** den Zeitraum, in dem die Verbreitungsrate zu- bzw. abnimmt.

e) **Untersuche**, an welchem Tag die Geschwindigkeit, mit der das Gerücht verbreitet wird, am größten ist und **beschreibe**, wie dies am Graphen ablesbar ist.

Aufgabe 3 (Interpretieren von Änderungsraten)

Gib die Bedeutung der mittleren Änderungsrate einer Funktion f im Sachzusammenhang **an**, wenn f(t) die …

- Anzahl der Autos beschreibt, die nach t Minuten eine Messstelle passiert haben.
- Produktionskosten angibt, die bei t produzierten Artikeln anfallen.
- zugeflossene Wassermenge in einen Stausee nach der Zeit t beschreibt.
- Anzahl der Bakterien in einer Kultur nach t Stunden darstellt.
- Schadstoffkonzentration eines Autos bei einer Geschwindigkeit t angibt.

3 Momentane Änderungsraten

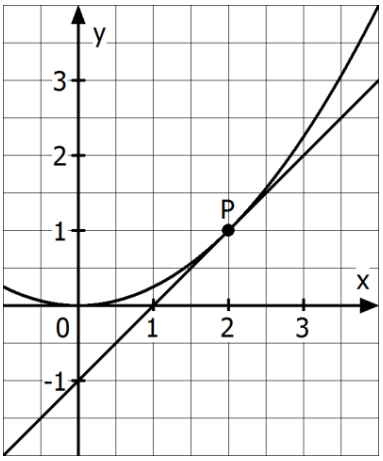
Definitionen:

(1) Die **Steigung des Graphen** einer Funktion f in einem Punkt P ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt P.

(2) Unter der **Ableitung** einer Funktion an einer Stelle x_0 versteht man die Steigung der Tangenten an den Graphen der Funktion an der Stelle x_0.

Diese Ableitung wird mit $\mathbf{f'(x_0)}$ (gelesen: f Strich von x_0) bezeichnet.

Im rechts dargestellten Beispiel gilt $\mathbf{f'(2) = 1}$.

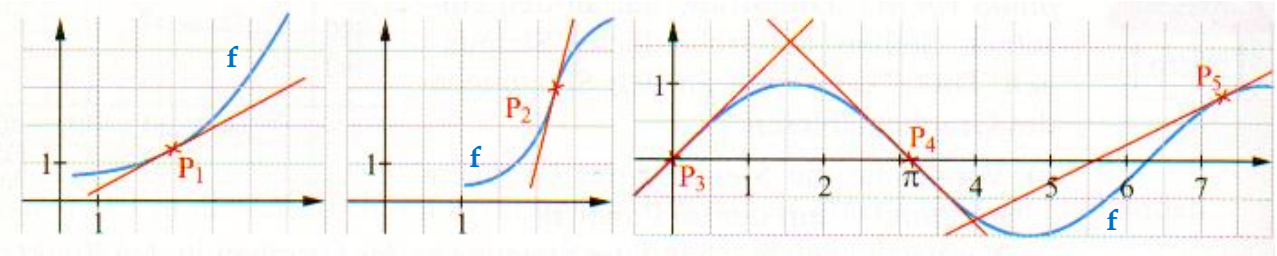


Im Folgenden werden wir zwei Verfahren kennenlernen, um die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0 zu bestimmen. Zum einen soll die Steigung des Graphen in einem Punkt P mithilfe einer Zeichnung ermittelt werden (**grafisches Differenzieren**), zum anderen erfolgt die Bestimmung mittels eines Rechenverfahrens (**h-Methode**).

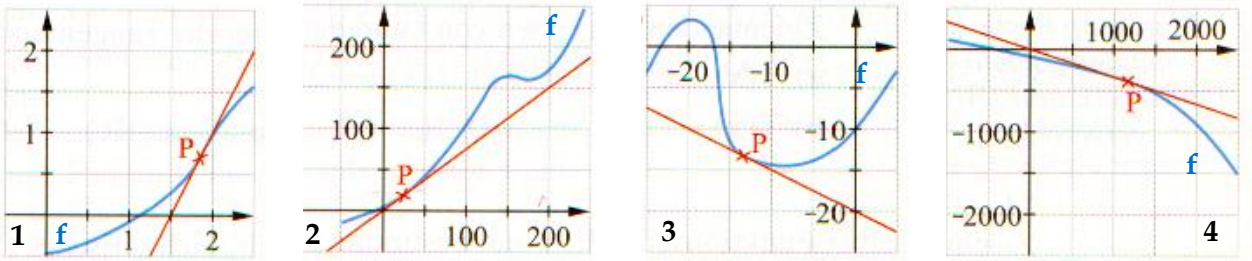
Grafisches Differenzieren mittels Tangentensteigung

Aufgabe 1: Ablesen von Steigungen eines Grafen[3]

a) **Lies** die Steigung des Graphen in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 **ab** und **notiere** jeweils die Ableitung $f'(x_0)$.



b) **Ermittle** für den Punkt $P(x_0/f(x_0))$ jeweils die Ableitung $f'(x_0)$.



c) **Zeichne** in die Darstellungen 2 und 3 aus Aufgabenteil b) Punkte **ein**, in denen der Graph von f genauso steil ist wie im Punkt P.

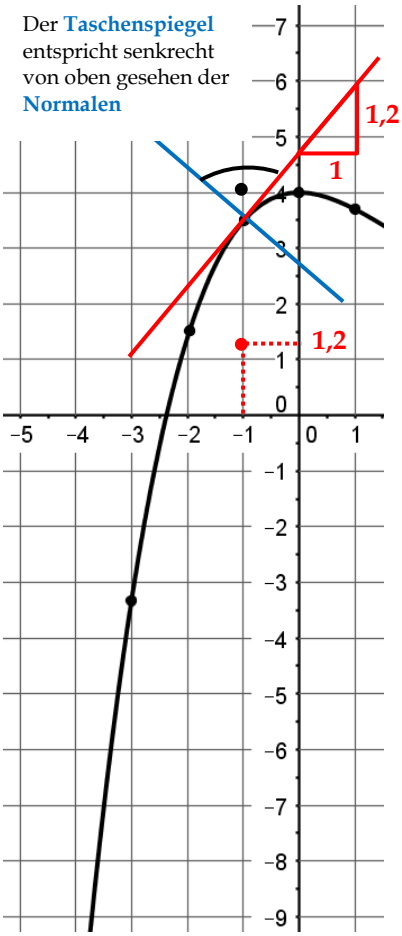
d) **Beschreibe** die in den obigen Abbildungen beschriebenen Lagen einer Tangente an einen Graphen einer Funktion im Punkt P.

---

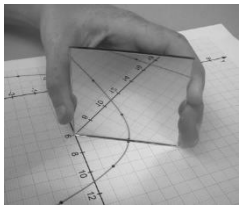
[3] Idee aus „Elemente der Mathematik“, Jahrgang 11, Schroedel (1999)

Aufgabe 2[4] (Spiegelmethode)

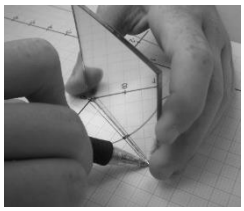
Es ist möglich, mithilfe eines Taschenspiegels und eines Geodreiecks die Steigung eines Funktionsgraphen an einem bestimmten Punkt zu ermitteln. Dafür geht man folgendermaßen vor:



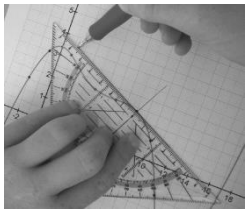
1. Schritt: Stelle einen **Spiegel** so auf den ersten markierten Grafenpunkt, dass der sichtbare Teil des Graphen und sein Spiegelbild bei Blick von schräg oben ohne Knick ineinander übergehen.



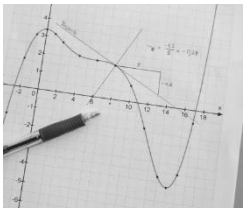
2. Schritt: Zeichne nun eine Gerade entlang der Spiegelkante (durch den markierten Grafenpunkt). Die gezeichnete Gerade ist die sogenannte **Normale** an den Grafen im ausgewählten Grafenpunkt.



3. Schritt: Zeichne mit dem Geodreieck die **Lotgerade** (sie ist senkrecht zur Normalen) zu dieser Geraden durch den Grafenpunkt. Dies ist die **Tangente** an den Graphen.



4. Schritt: Ermittle mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks die Steigung der Tangenten. Die Steigung entspricht der Ableitung an der Stelle -1. Im obigen Beispiel gilt **f´(-1) ≈ 1,2**. Diesen Wert trägt man unten in die Tabelle und als **Grafenpunkt** der Tagentensteigungsfunktion in das Koordinatensystem ein.



Schritt 5: Führe die Schritte 1 bis 4 für alle im Graphen von f markieren Punkte aus und verbinde die Punkte zu einem Graphen der **Tangentensteigungsfunktion**.

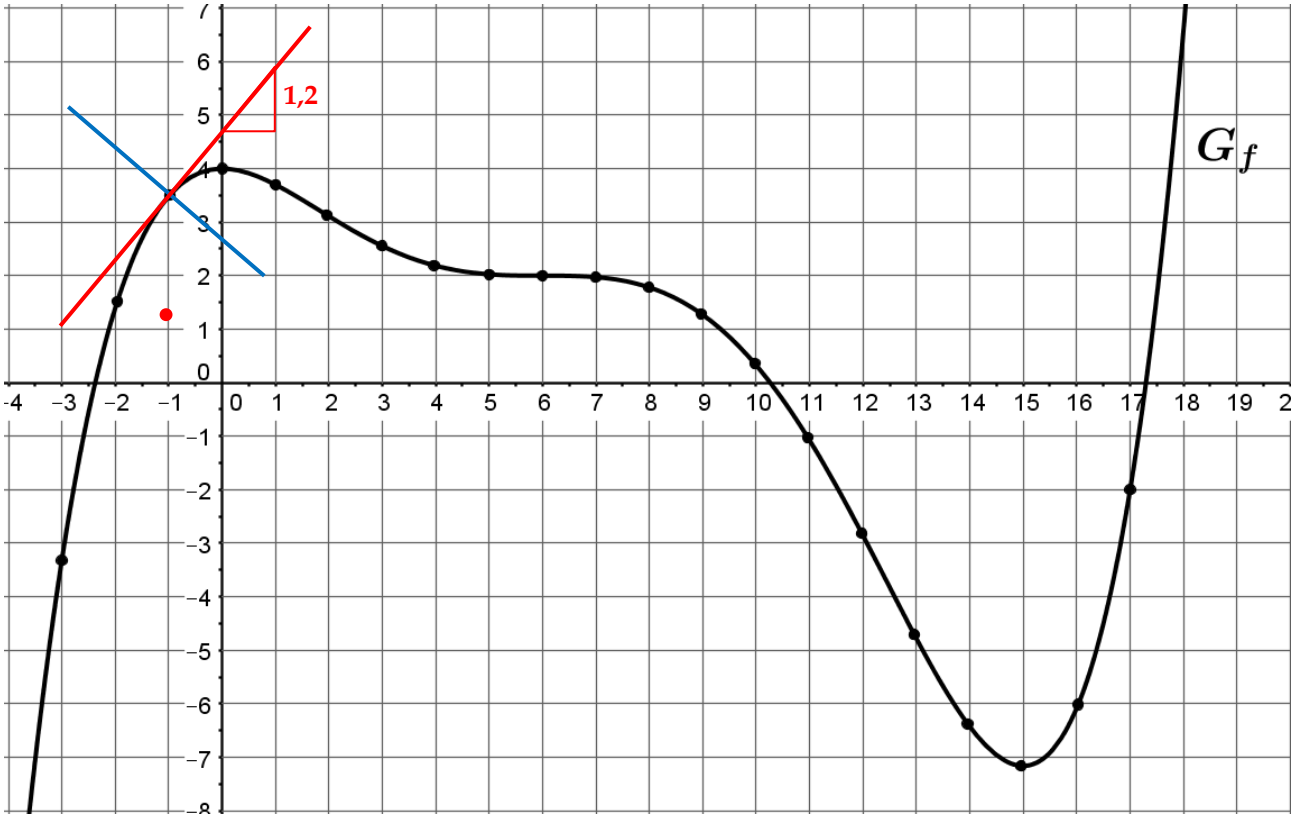
Definition:

Die Funktion **f´**, die jedem x-Wert x_0 die Steigung des Graphen von f im Punkt $(x_0/f(x_0))$ zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** oder **Tangentensteigungsfunktion**.

Ermittle mithilfe der Spiegelmethode durch grafisches Differenzieren den Graphen der Ableitung bzw. Tangentensteigungsfunktion.

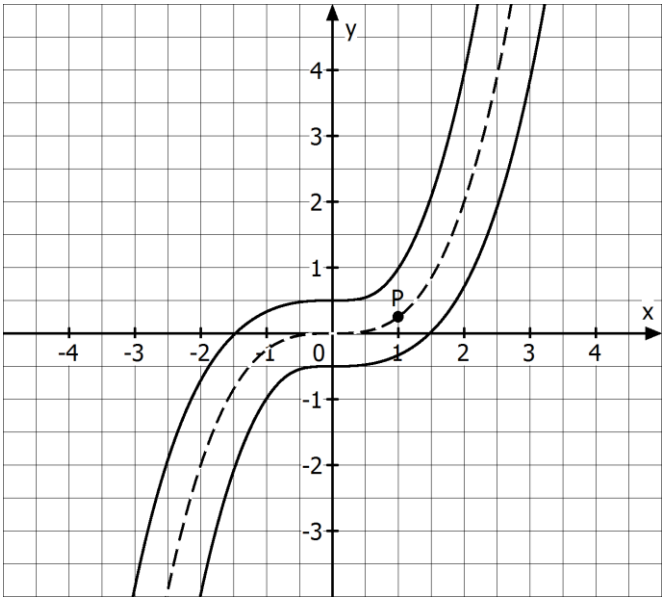
x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f´(x_0)$			1,2								
x_0	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$f´(x_0)$											

[4] Aufgabenidee stammt aus Fokus Mathematik, E-Phase, Cornelsen (2015)



Aufgabe 3 (Aquaplaning)[5]

Bei Aquaplaning verlieren die Reifen des Fahrzeugs den Kontakt zur Straße. Dadurch fehlt die für das Spurhalten, Lenken, Bremsen und Beschleunigen benötigte Reibung. Man verliert damit also auch die Kontrolle über das Fahrzeug. Im Bild ist der Verlauf einer Straße dargestellt. Die weiß gezeichnete Mittellinie wird durch die Funktion f mit $\mathbf{f(x) = 0{,}25 \cdot x^3}$ beschrieben. Der Fahrer erkennt die große Pfütze im Punkt P zu spät, das Fahrzeug bricht aus.



a) **Berechne** die Koordinaten des Ausbruchpunktes P.

[5] Idee aus Fokus Mathematik, E-Phase, Cornelsen (2015)

b) **Bestimme** zeichnerisch die Richtung in die sich das Auto ohne Zutun des Lenkers bewegt. [Hinweis: y-Achse zeigt in Richtung Norden und die x-Achse in Richtung Osten.]

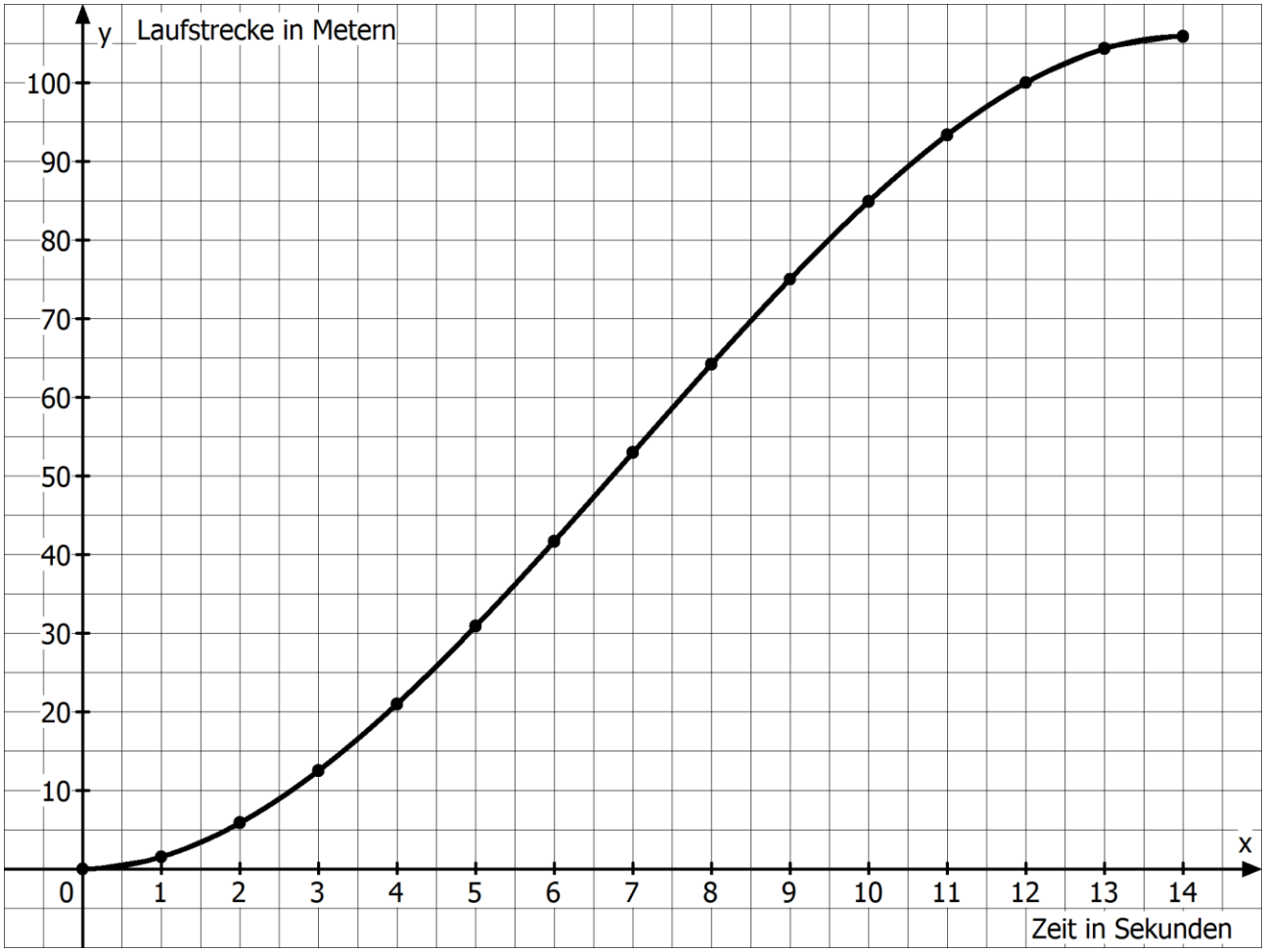
c) **Ermittle** die Gleichung der Tangenten t im Punkt P.

d) Nimm an, dass das Auto sich auf der von Dir in Aufgabenteil b) eingezeichneten Tangenten weiterbewegt und die rechte Leitplanke für $0 \leq x \leq 3$ näherungsweise durch einen Graphen mit der Funktionsgleichung $\mathbf{g(x) = 0,2 \cdot (x - 0,2)^3 - 0,47}$ dargestellt werden kann.[6]

Bestimme zeichnerisch und rechnerisch mithilfe des GTR die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Auto auf die Leitplanke trifft. [Nimm für die Tangente die Gleichung t(x) = 0,75 x – 0,5 an und verwende beim GTR das MENU A Gleichung sowie das MENU 5 (Graph).]

Aufgabe 4 (100-m-Sprint)

a) Bestimme in der folgenden Abbildung von Einführungsbeispiel 2 (100-m-Sprint) mittels Spiegelmethode den Graphen der Tangentensteigungsfunktion für $0 \leq x \leq 14$.



b) **Gib** die Bedeutung der Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang **an**.

---

[6] Mithilfe einer Parametrisierung $x = u \pm a \cdot \frac{f'(u)}{\sqrt{1+[f'(u)]^2}}$ und $y = g(x) = f(u) \mp \frac{a}{\sqrt{1+[f'(u)]^2}}$ lässt sich zu einem Graphen einer Funktion f ein Graph einer Funktion g finden, der an jeder Stelle den Abstand a zum Graphen der Funktion f hat.

Rechnerisches Differenzieren mittels h-Methode

Aufgabe 5 (Mit einem Kleinwagen von 0 auf 100 in unter 3 Sekunden!)[7]

Die Mutprobe bei der ersten 1000000 Euro Show im deutschen Fernsehen am 1. April 2017: Car-Dropping der Superlative! An einem Spezialkran geht es mit dem Auto auf **100 m** Höhe. Auf Kommando des Moderators stürzen sie in die Tiefe – nur von einem Bungee-Seil gehalten. Von 0 auf 100 in nur 3 Sekunden. Wird es ein Paar wagen?

Im Folgenden soll überprüft werden, ob der PKW tatsächlich nach 3 Sekunden eine Geschwindigkeit von mindestens $100\,\frac{km}{h}$ haben kann.

Hinweis aus der Physik: Die Bewegung eines Körpers im freien Fall kann durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben werden. Mit t wird die Zeit in Sekunden bezeichnet und g die Fallbeschleunigung, s(t) wird in Meter berechnet. Dabei gilt: $\mathbf{s(t)} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{t^2}$ mit $g \approx 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$.

a) **Untersuche**, nach welcher Zeit das Auto auf dem Boden aufkommen würde, wenn es nach 80 m nicht durch das Bungee-Seil abgebremst werden würde.

b) **Berechne** die Höhe des Autos über dem Boden nach 2, 3 und 4 Sekunden.

c) **Zeichne** den Graphen der Weg-Zeit-Funktion mithilfe des GTR.

d) **Berechne** die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die ersten 3 Sekunden, für die Zeit zwischen der 3. und 4. Sekunde [2. und 3. Sekunde] für die Zeit zwischen 3 und 3,5 Sekunden [2,5 und 3 Sekunden], zwischen 3 und 3,1 Sekunden [2,9 und 3 Sekunden], zwischen 3 und 3,01 Sekunden [2,99 und 3 Sekunden] und allgemein mit h > 0 zwischen 3 und 3 + h Sekunden [3 – h und 3 Sekunden].

e) (1) **Interpretiere** den Term $\frac{\mathbf{s(3+h)-s(3)}}{\mathbf{h}}$ $[\frac{\mathbf{s(3)-s(3-h)}}{\mathbf{h}}]$ im obigen Sachkontext.

(2) **Gib** die geometrische Bedeutung des Quotients **an**.

(3) **Veranschauliche** diesen Quotient für ein beliebiges h > 0 in der Zeichnung aus Aufgabe c).

(4) **Vereinfache** den Term $\frac{s(3+h)-s(3)}{h}$ $[\frac{s(3)-s(3-h)}{h}]$ und **bestimme** die Momentangeschwindigkeit genau zum Zeitpunkt 3 Sekunden? **Beantworte** die oben gestellte Frage.

Aufgabe 6 (Peter, der korrekte Autofahrer?)[8]

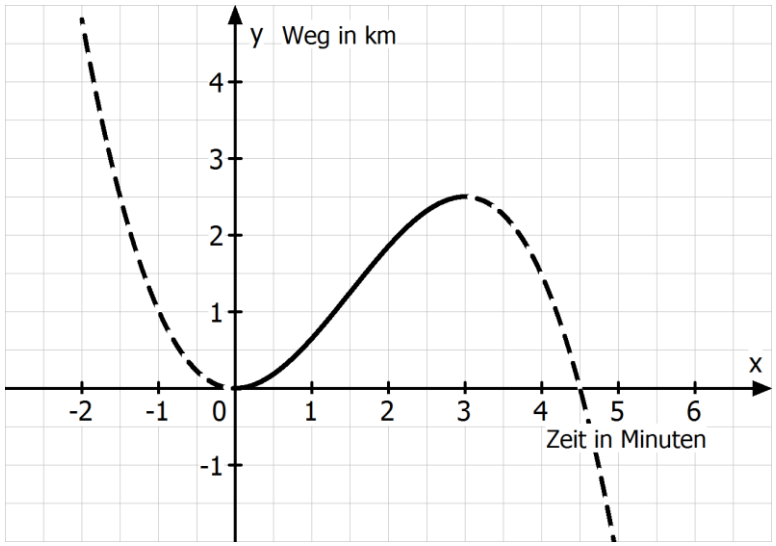
Peter rühmt sich, ein besonders korrekter Autofahrer zu sein. „Gestern“, so sagt er, „habe ich für die 2,5 km lange Ortsdurchfahrt in Marl genau 3 Minuten benötigt.“ War Peter so korrekt, oder hat er dabei nur Glück gehabt, dass an manchen Stellen keine Geschwindigkeitskontrolle war?

Die Auswertung des elektronischen Fahrtenbuchs, das die Fahrzeit und die zurückgelegte Strecke speichert, hat ergeben, dass für $0 \leq x \leq 3$ die Weg-Zeit-Funktion ungefähr durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden kann: $\mathbf{f(x)} = -\frac{5}{27} \cdot \mathbf{x^3} + \frac{5}{6} \cdot \mathbf{x^2}$ (x in min, f(x) in km.)

---

[7] Aufgabenidee aus dem Materialpool Schulentwicklung NRW (Autorin: Christel Weber) unter http://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/upload/204/f1107799619171_Ergebnissicherung-Ableitung-%20von%202003-04.doc.(01.07.2016)

[8] Quellenangabe vgl. unter [7]



a) **Erläutere**, wie Peter zu der Aussage kommt, dass er ein korrekter Autofahrer ist.

b) **Untersuche** ohne und mit GTR, ob es Zeitintervalle gibt, in denen er schneller/langsamer als $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren ist.

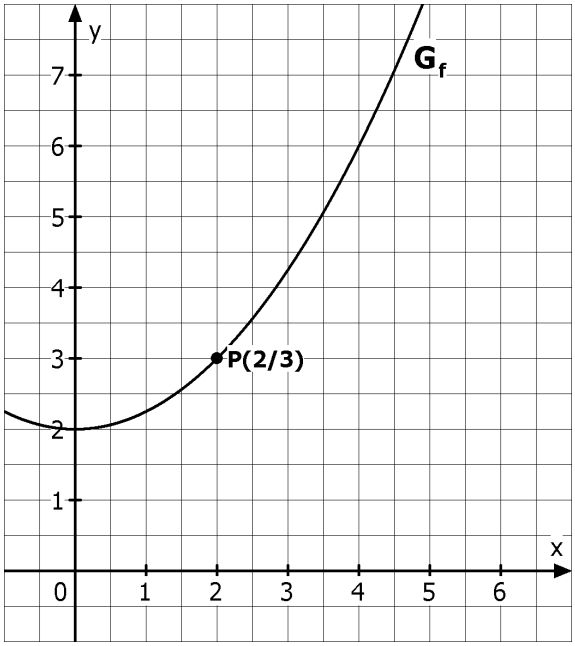
c) **Gib** einen Funktionsgrafen und einen dazugehörigen Funktionsterm **an**, bei dem Peter korrekt gefahren wäre.

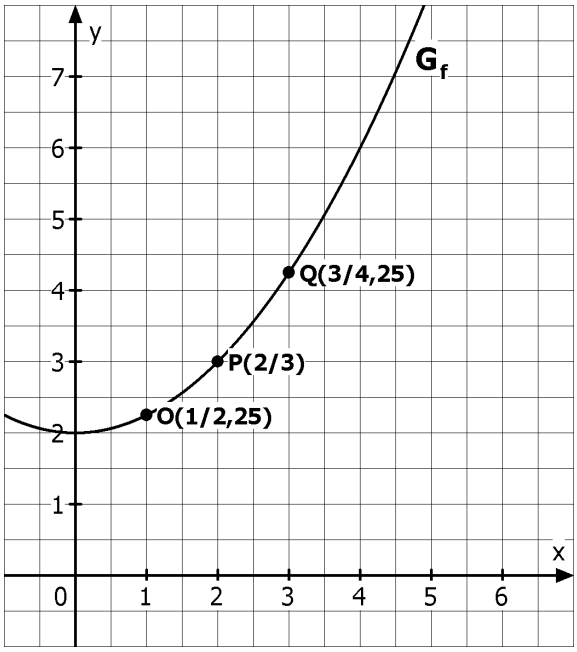
d) Peter hat erfahren, dass nach 1,5 Minuten Fahrzeit die Geschwindigkeit gemessen wurde.

Überprüfe, ob er mit einem Bußgeldbescheid rechnen muss.

Aufgabe 7 (Rechenverfahren zur Bestimmung der Ableitung – h-Methode)

Wir wollen nun die Steigung des Grafen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25 \cdot x^2 + 2$ im Punkt P(2/3) bestimmen.

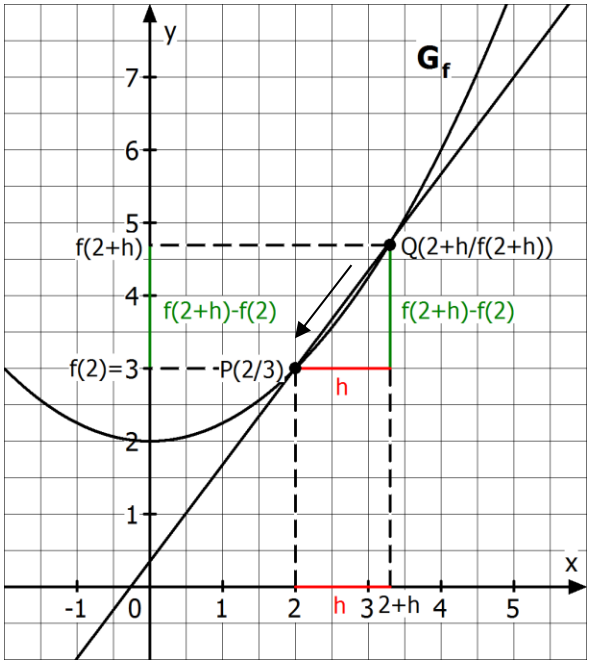


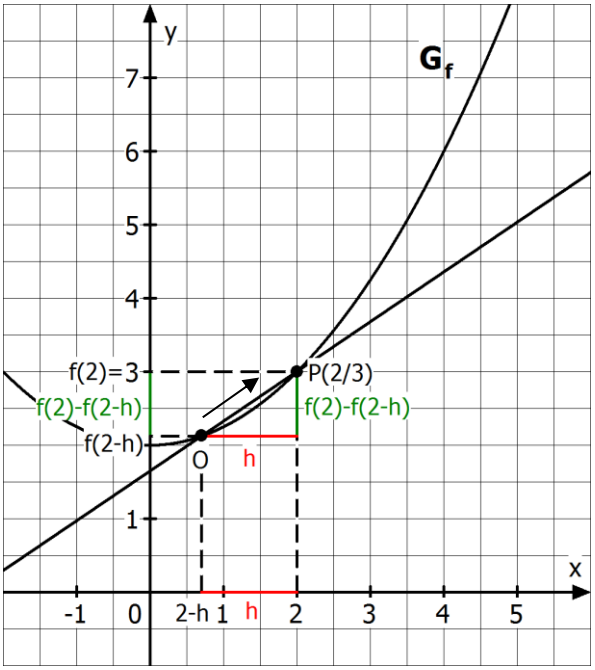


a) **Zeichne** in die linke Abbildung mit dem Geodreieck und einem Spiegel die Tangente an den Grafen im Punkt P(2/3) und **lies** die Steigung **ab**.

b) **Zeichne** in die rechte Abbildung die Sekanten durch die Grafenpunkte P(2/3) und Q(3/4,25) sowie die Punkte O(1/2,25) und P(2/3) und **bestimme** deren Steigungen. **Gib** mithilfe der beiden Steigungen eine Näherung für die Steigung der Tangente im Punkt P **an**.

c) Um noch bessere Näherungswerte für die gesuchte Tangentensteigung zu bekommen, rücken wir die Punkte O (Abbildung rechts) und Q (Abbildung links) immer näher an Punkt P(2/3) heran. Im Grenzfall, dass O und Q auf P fallen, erhalten wird die Steigung der Tangenten an den Grafen im Punkt P(2/3). Der Abstand der x-Werte der beiden Punkte O und Q zum x-Wert 2 des Punktes P bezeichnen wir mit h.





(1) **Zeige,** dass für die Steigung m_{PQ} der Sekanten durch die Punkte P(2/3) und Q(2 + h/f(2 + h)) folgende Formel gilt: $m_{PQ} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 1 + 0{,}25h$. (vgl. Abbildung links)

(2) **Weise nach,** dass für die Steigung m_{OP} der Sekanten durch die Punkte O(2 – h/f (2 − h)) und P(2/3) die folgende Formel gilt: $m_{OP} = \frac{f(2)-f(2-h)}{h} = 1 - 0{,}25h$ gilt. (vgl. Abbildung rechts).

(3) **Fülle** mithilfe der obigen Formel die folgende Tabelle **aus**.

h	**Q(2 + h/f(2 + h))**	**m_{PQ}**	**h**	**O(2 – h/f(2 − h))**	**m_{OP}**
1	Q(3/4,25)		1	O(1/2,25)	
0,5			0,5		
0,1			0,1		
0,01			0,01		

(4) **Berechne** die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} m_{PQ}$ und $\lim\limits_{h\to 0} m_{OP}$ (Lies: „Limes der Sekantensteigungen für h gegen Null“) und interpretiere das Ergebnis anhand des Grafen.

d) Für eine beliebige Stelle x_0 beschreibt mit $h > 0$ der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die rechtsseitigen Sekantensteigungen durch die Punkte $P(x_0/f(x_0))$ und $Q(x_0 + h/f(x_0 + h))$.

(1) **Zeige**, dass für der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h < 0$ die linkseitigen Sekantensteigungen durch die Punkte $O(2 + h/f(2 + h))$ und $P(x_0/f(x_0))$ beschreibt und es daher reicht, immer nur $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ zu betrachten.

(2) **Weise nach**, dass $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0{,}5 \cdot x_0 + 0{,}25 \cdot h$.

(3) **Berechne** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und **interpretiere** das Ergebnis geometrisch.

Die Ergebnisse aus Aufgabe 7 lassen sich in folgendem Satz festhalten:

Satz:

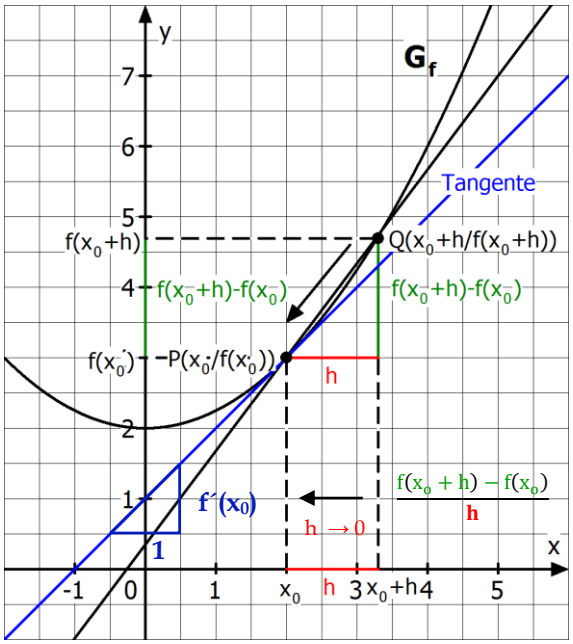
Mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kann die Steigung der Tangenten im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ einer differenzierbaren Funktion für kleines h angenähert werden. Im Grenzfall gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m_{Tangente} = f'(x_0)$$

Im obigen **Beispiel** für $f(x) = 0{,}25 \cdot x^2 + 2$ gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0{,}5 \cdot x_0$$

Für $x_0 = 2$ erhält man $f'(2) = 0{,}5 \cdot 2 = 1$. Dieser Wert beschreibt die Steigung der Tangenten im Punkt $P(2/3)$. Die Funktion f' mit $f'(x) = 0{,}5x$ ist die Ableitungsfunktion (Tangentensteigungsfunktion) von f.



Aufgabe 8 (Tangentengleichung mittels h-Methode bestimmen)

a) **Ermittle** mittels h-Methode die Ableitungsfunktion f' für die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

b) **Berechne** die Ableitung an der Stelle 1 und **bestimme** damit die Gleichung der Tangente an den Grafen an der Stelle 1.

Aufgabe 9 (Klippenspringen)

Klippenspringen ist eine Sportart, bei der die Sportler von Felsklippen aus über zehn Metern Höhe in Gewässer springen. Sie verbindet Techniken des Turmspringens mit den Anforderungen, die die freie Natur an die Sportler stellt. Die Absprunghöhen von Klippenspringern bewegen sich auf europäischem Wettkampfniveau zwischen 13 und 22 Metern. Bei Worldcup-Veranstaltungen wird aus bis zu 28 Metern gesprungen. Bei höheren Höhen taucht der Klippenspringer in der Regel mit den Füßen im Wasser ein.

Ein Klippenspringer springt mit einem Fußsprung von einem 20 Meter hohen Felsen. Sein Weg-Zeit-Verlauf kann näherungsweise durch die Funktion s mit $\mathbf{s(t) = 5 \cdot t^2}$ angegeben werden (**t**: Zeit in Sekunden; **s(t)**: zurückgelegte Strecke in Metern; der Vorfaktor **5** hat die Einheit $\frac{m}{s^2}$ und entspricht etwa der halben Erdbeschleunigung g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$.)

a) **Untersuche**, nach welcher Zeit der Klippenspringer ins Wasser eintaucht.

b) **Zeichne** mit dem GRT den Grafenverlauf zur Funktion s vom Absprung bis zum Eintauchen ins Wasser. [Hinweis: Denke an einen geeigneten Darstellungsbereich.]

c) **Zeichne** mit dem GRT die Tangente an den Graphen von s an der Stelle 1. **Gib** mit dem GTR ihre Steigung sowie ihre Funktionsgleichung **an**. **Überprüfe** die Funktionsgleichung der Tangente mit einer Rechnung. [Hinweis: Über **Sketch** und **Tangent** kannst Du die Tangente zeichnen. Wenn Du im **Setup-Menu** den Unterpunkt **Derivative** auf **On** einstellst, wird die Steigung der Tangente in einem Punkt immer mitangezeigt.]

d) **Gib** die Bedeutung der Tangentensteigung an der Stelle 1 **an**.

e) **Berechne** mit der h-Methode die Steigung von s an der Stelle t = 1.

f) **Bestimme** mit der h-Methode die Steigung von s an einer beliebigen Stelle t.

g) **Interpretiere** die Werte von e) und f) im Sachzusammenhang.

h) **Ermittle** die Geschwindigkeit, mit der der Klippenspringer ins Wasser eintaucht.

Merksätze zu den Kapiteln mittlere und momentane Änderungsraten

Kontext	Mittlere …	Momentane …
Inner-mathematisch	Steigung in einem Intervall $[x_0; x_0 + h]$	Steigung an einer Stelle x_0 des Graphen von f = Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0
Zeitlichen Verläufe	Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $[x_0; x_0 + h]$	Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt x_0
Allgemein	Änderungsrate in einem Intervall $[x_0; x_0 + h]$	Änderungsrate an einer Stelle x_0 = Ableitung an einer Stelle x_0 = $f'(x_0)$
mathematischer Ausdruck	$m_{Sekante} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0) = m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

4 Ableitungsregeln und höhere Ableitungen[9]

Aufgabe 1 (Ableitungsregeln)

a) **Ermittle** für die Potenzfunktionen $f_1(x) = x^1$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = x^3$ mittels h-Methode die Ableitungsfunktion. Erkennst Du eine Regelmäßigkeit?

b) **Ermittle** für die Funktionen $g_1(x) = 2x^2$, $g_2(x) = x^2 + x$ und $g_3(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) mittels h-Methode die Ableitungsfunktion. Erkennst Du weitere Regelmäßigkeiten?

Es lassen sich nun aus den Aufgaben a) und b) vier wichtige **Ableitungsregeln** ableiten:

1 Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Beispiel: $f(x) = x^{11} \Rightarrow f'(x) = 11 \cdot x^{10}$
2 Konstantenregel: Für $k \in \mathbb{R}$ gilt $k' = 0$. Beispiel: $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$
3 Faktorregel: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ ($c \in \mathbb{R}$). Beispiel: $h(x) = 5 \cdot x^{11} \Rightarrow h'(x) = 5 \cdot 11 \cdot x^{10} = 55 \cdot x^{10}$
4 Summenregel: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$. Beispiel: $h(x) = 5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 \Rightarrow h'(x) = 10 \cdot x^2 + 8 \cdot x$

c) **Bestimme** den Ableitungsterm der Funktionen f. **Gib** die verwendeten Ableitungsregeln **an**.

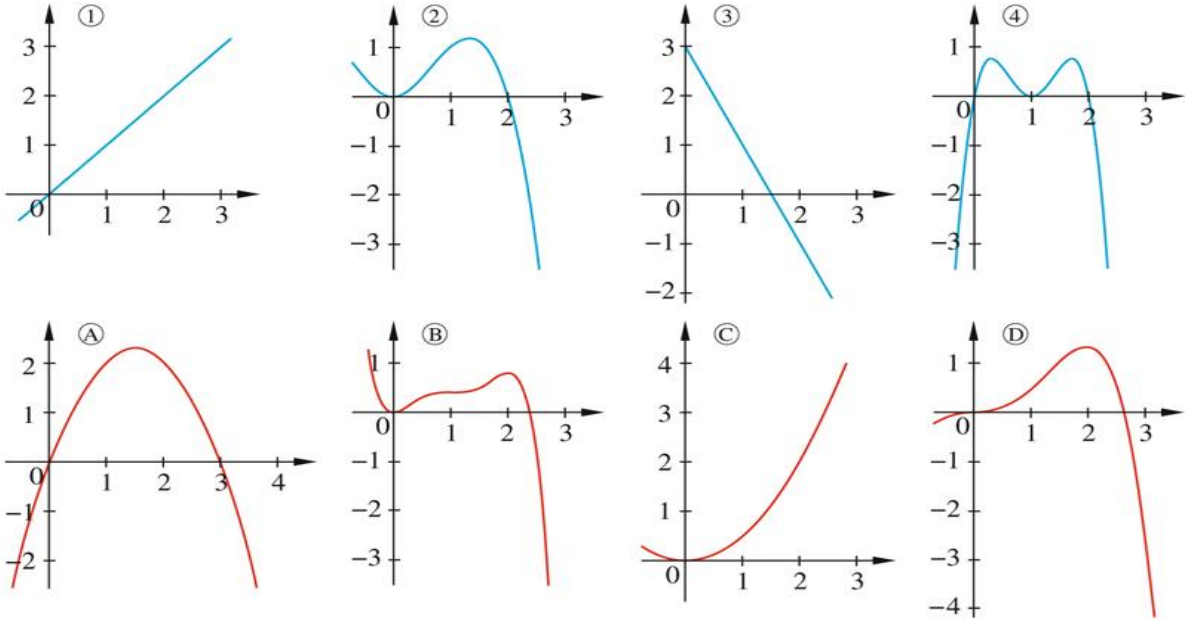
(1) $f(x) = x^8$ (2) $f(x) = x$ (3) $f(x) = 0{,}5\,x^2$
(4) $f(x) = 0{,}1\,x^6$ (5) $f(x) = \pi^2$ (6) $f(x) = x^{n+1}$
(7) $f(a) = 0{,}4\,a^{10}\,x^4$ (8) $f(x) = 6\,x^8$ (9) $f(x) = 0{,}1\,x^{10}$
(10) $f(x) = 0{,}5\,x$ (11) $f(x) = 3\,x^3 + 0{,}6\,x^5 - x$ (12) $f(x) = x^8 + x^2$
(13) $f(x) = x^3 + x$ (14) $f(x) = x^4 - x^2 + 5$ (15) $f(x) = x^{11} - x^9 + x - 2$
(16) $f(z) = z^{101} - x^9 + z - \pi$ (17) $f(a) = a - x^9 + x - 2$ (18) $f(y) = y^4 - y^3 + y^2 - y + 27$

d) **Begründe** mit den obigen Regeln, dass $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$ gilt.

e) **Interpretiere** die Summen- Faktor- und Konstantenregel geometrisch.

f) **Beweise** mithilfe der h-Methode die Summen- und Faktorregel.

g) Die Grafen 1 bis 4 zeigen Grafen von Ableitungsfunktionen zu Funktionen, deren Grafen durch die Grafen A bis D dargestellt werden.



Begründe, welcher der Ableitungsgrafen 1 – 4 zu welchem der Funktionsgrafen A – D gehört.

[9] fakultativ

Aufgabe 2 (Höhere Ableitungen)

Definition:

Wird die Ableitungsfunktion f´(x) einer Funktion f, auch 1. Ableitung oder f-Strich genannt, erneut abgeleitet, so erhält man die 2. Ableitung von f (x), schreibt f´´(x) und liest „f-zwei-Strich" von x. Falls weitere Ableitungen von f (x) existieren, folgt mit f´´´(x) die 3. Ableitung von f (x), gelesen „f-drei-Strich von x". Von der 4. Ableitung an werden statt der Striche hochgestellte und geklammerte Indizes benutzt: $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$ … Bei der praktischen Ausführung der Rechnungen gelten die üblichen Ableitungsregeln.

a) **Bestimme** von den angegebenen Funktionen f die jeweiligen Ableitungsfunktionen.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

$f'(x) =$ _____

$f''(x) =$ _____

$f'''(x) =$ _____

$f^{(4)}(x) =$ _____

$f(x) = 0{,}25\,x^8 - x^7 + \pi$

$f'(x) =$ _____

$f''(x) =$ _____

$f'''(x) =$ _____

$f^{(6)}(x) =$ _____

$f(x) = x(x^2 + 7) =$

$f'(x) =$ _____

$f''(x) =$ _____

$f'''(x) =$ _____

$f^{(8)}(x) =$ _____

$f(x) = x^2(x - 2)^2 =$

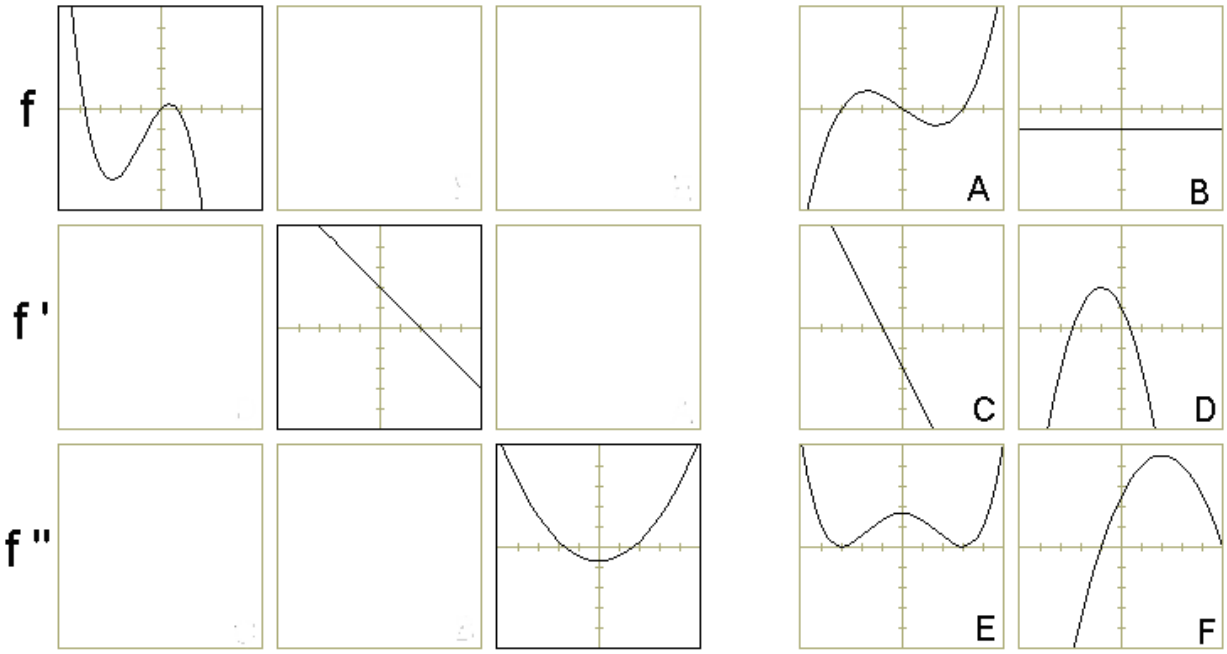
$f'(x) =$ _____

$f''(x) =$ _____

$f'''(x) =$ _____

$f^{(4)}(x) =$ _____

b) **Fülle** die Lücken **aus**. Dabei sollen die Lücken mithilfe der Funktionen A bis F ausgefüllt werden. **Begründe** Deine Auswahl unter Angabe von 2 Argumenten.



5 Kontrollaufgaben

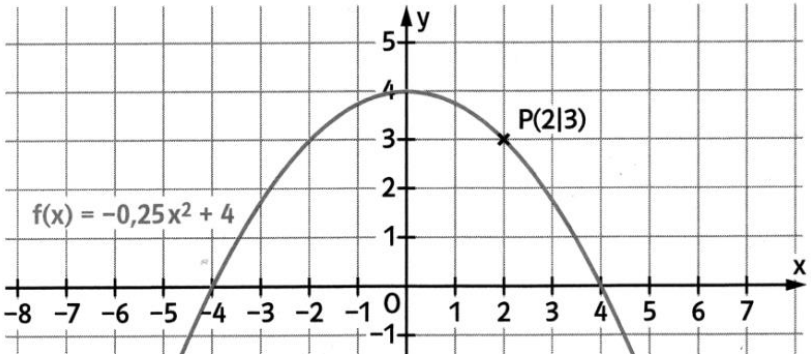
Kompetenzraster

Ich kann …	Wo?	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher
eine Funktionsgleichung aufstellen, indem ich geeignete Parameter in die Parameterform einsetze.	3a)				
die Strecke einer Lawine nach einer bestimmten Zeit mithilfe einer Weg-Zeit-Funktion berechnen.	3b)				
mittels Spiegelmethode eine Tangente an einen Grafen in einem Punkt einzeichnen und deren Steigung ablesen.	1a)				
den Ableitungsterm einer GRF bestimmen und die angewendeten Ableitungsregeln angeben.	1b), 3f)				
eine Tangentengleichung rechnerisch bestimmen.	1c), 3h)(3)				
einen Bestand mithilfe einer Bestandsfunktion berechnen.	2a)				
eine durchschnittliche Änderungsrate bestimmen.	2b), 3c) 3g)				
eine mittlere Steigung berechnen.	4b)				
den Ableitungswert an einer bestimmten Stelle berechnen und im Sachzusammenhang deuten.	2c), 3g)				
den Neigungswinkel eines Hanges berechnen.	3i)				
Steigungswinkel in Steigung umrechnen und damit ein Sachproblem lösen.	4d)				
den Geländepunkt mit der größten momentanen Steigung in ein Höhenprofil einzeichnen.	4c)				
den Grafen der Ableitung skizzieren, wenn der Graf einer Funktion gegeben ist.	2d)				
mittels h-Methode die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen	3e)				
einem Ableitungsterm im Sachzusammenhang deuten.	3f)				
km pro Stunde in m pro Sekunde umwandeln und umgekehrt.	3g)				
Bedeutung der Tangentensteigung im Sachkontext deuten.	3i)				
Angaben aus einem Höhenprofil ablesen.	4a)				
eine zu einer Strecke parallele Tangente einzeichnen und zur Problemlösung heranziehen.	4e)				
einen Streckenverlauf einzeichnen, wenn das Gefälle angegeben ist.	4f)				
mit dem GTR unter Beachtung eines passenden Darstellungsbereichs den Grafen einer GRF zeichnen (MENU 5).	3h)(1)				
mit dem GTR die Tangente an einer bestimmten Stelle an den Grafen einzeichnen und deren Steigung und Funktionsgleichung angeben (MENU 5).	3h)(2)				

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Rund um die Tangente

a) **Zeichne** mit dem Taschenspiegel die Tangente an den Graphen von f im Punkt P **ein** und **bestimme** durch Ablesung die dazugehörige Tangentengleichung t(x).

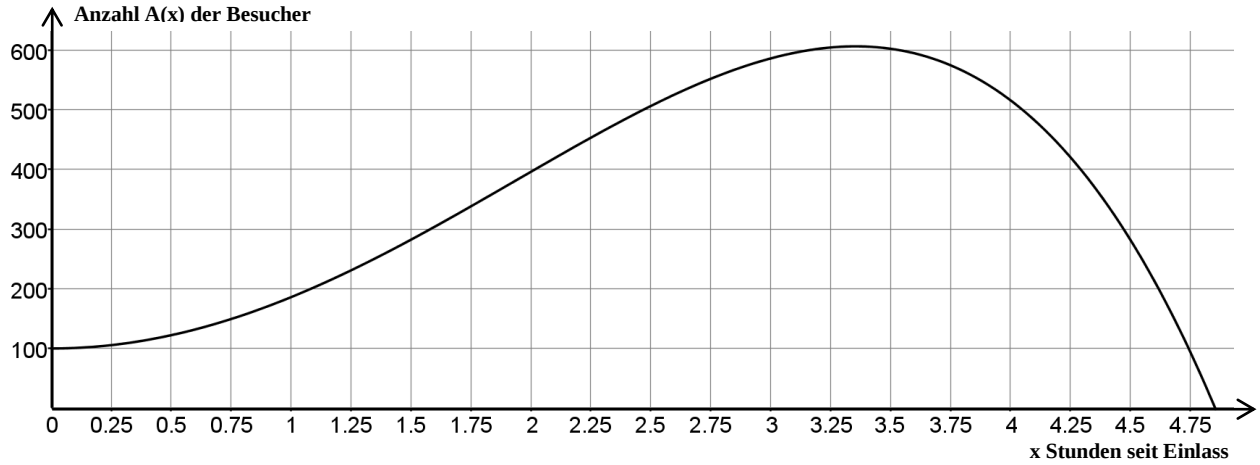


b) **Gib** für die Funktionen f mit $\mathbf{f(x) = -0,25x^2 + 4}$ den Ableitungsterm f´(x) **an**. **Erläutere,** welche Ableitungsregeln Du angewendet hast.

c) **Berechne** f´(2) und **ermittle rechnerisch** die Gleichungen t(x) der Tangenten an den Graphen von f im Punkt P.

Aufgabe 2: Zuschauerandrang während eines Reitturniers

Die Anzahl der Zuschauer während eines Reitturniers wird für $0 \leq x \leq 4,85$ näherungsweise durch die Funktion A mit $\mathbf{A(x) = -4x^4 + 90x^2 + 100}$ beschrieben, wobei x die seit dem Einlass um 15:00 vergangene Zeit ist. Der Graph ist im Folgenden dargestellt.



a) **Zeige rechnerisch**, dass um 16:00 186 Besucher im Stadion sind.

b) Nach 3 Stunden sind 586 Zuschauer im Stadion. **Ermittle** die durchschnittliche Änderung der Besucherzahl pro Stunde im Zeitraum von 16 Uhr bis 18 Uhr.

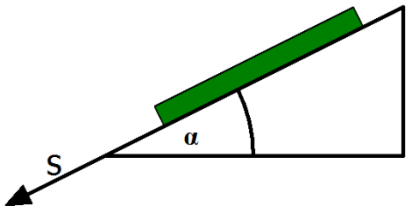
c) **Bestimme** A´(1) und **gib** die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang **an**.

d) Um 18:21 sind die meisten Besucher im Stadion. Der Besucherandrang in das Stadion hinein ist um 16:56 am größten. **Skizziere** im obigen Diagramm den Graphen zu A´ für die Zeitspanne vom Einlass bis zum Zeitpunkt des Besucherzahlmaximums.

Teil II: Aufgaben unter Nutzung des GTR

Aufgabe 3: Schneebrettlawinen[10]

Kennzeichen für Schneebrettlawinen ist ein linienförmiger Anriss etwa quer zum Hang. Ausgedehnte Schichten der Schneedecke – oft aus Triebschnee – rutschen zunächst zusammenhängend ab. Die Schneebrettlawinen stellen die klassische Gefahrenlawine für Schneesportler und Bergsteiger dar. Opfer einer solchen Lawine sterben oftmals nicht durch Ersticken, sondern an Verletzungen durch Aufprall an Felsen, Absturz oder Druck der oft tonnenschweren Schneemassen.



Das fast reibungslose Gleiten dieser Schneebrettlawinen auf einem Berghang mit hoher Geschwindigkeit ist ein Beispiel für die Bewegung eines Körpers auf der schiefen Ebene. Es gilt für den zurückgelegten Weg s des Körpers: $\mathbf{s(t) = \frac{g}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2}$ (**t:** Zeit nach Auslösen der Lawine in Sekunden, **g:** Erdbeschleunigung beträgt ca. 10 ms^{-2}, **α:** Neigungswinkel des Hanges)

a) Ein Hang hat einen Neigungswinkel α von 30 Grad.

Zeige, dass für die zurückgelegte Strecke einer Schneebrettlawine nach t Sekunden folgende Gleichung gilt: $\mathbf{s(t) = 2,5 \cdot t^2}$ gilt.

b) **Berechne** die Strecke, die eine Lawine in den ersten 3 Sekunden zurückgelegt hat.

c) **Bestimme** die zurückgelegte Strecke der Lawine zwischen der 2. und 3. Sekunde.

d) **Berechne** die Durchschnittgeschwindigkeit einer Lawine in der 3. Sekunde in km/h.

e) **Bestimme** mithilfe der h-Methode die momentane Geschwindigkeit einer Schneebrettlawine nach 2 Sekunden in Metern pro Sekunde und Kilometer pro Stunde.

f) **Ermittle** unter Angabe der angewendeten Ableitungsregeln einen Term für s´(t) und **interpretiere** diesen Term im obigen Sachzusammenhang.

g) **Bestimme**, nach welcher Zeit das Schneebrett eine momentane Geschwindigkeit von 305 km/h erreicht und **berechne** die dabei zurückgelegte Strecke. [Hinweis: Wandle die momentane Geschwindigkeit zunächst in Meter pro Sekunde um.]

h) Auf einem zweiten Hang kann der zurückgelegte Weg x(t) einer Lawine durch die Funktionsgleichung $\mathbf{x(t) = 0,5 \cdot t^2}$ beschrieben werden.

(1) **Zeichne** mit dem GTR den Weg-Zeit-Verlauf x(t) für die ersten zehn Sekunden sowie die Tangente an den Graphen von x nach 5 Sekunden.
(2) **Gib** mithilfe des GTR die Steigung und die Gleichung der Tangenten **an**.
(3) **Überprüfe** rechnerisch den Wert für die Tangentensteigung an der Stelle 5.

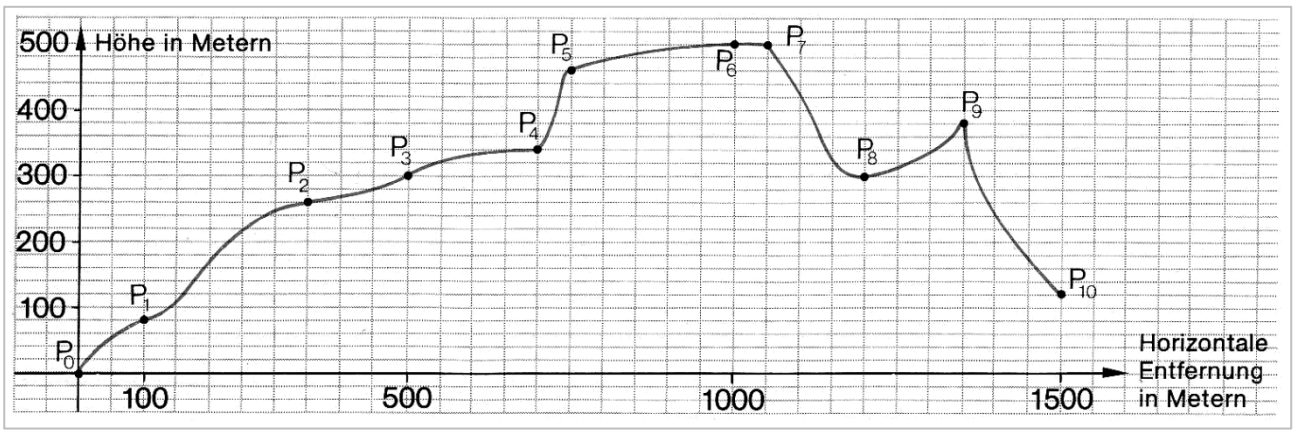
i) **Gib** die Bedeutung der obigen Tangentensteigung im Sachkontext **an, ermittle** die Gleichung dieser Tangenten und **berechne** den Neigungswinkel des zweiten Hanges.

---

[10] Idee aus „Elemente der Mathematik“, Jahrgang 11, Schroedel (1999)

Aufgabe 4: Höhenprofil

In der folgenden Abbildung siehst Du ein Geländeprofil.



a) **Gib an**, …
   a1) in welcher Höhe der höchste Punkt liegt.
   a2) in welcher Höhe man sich 250 m vom Punkt P_0 entfernt befindet.
   a3) nach welcher Horizontalentfernung man erstmalig 300 m Höhe erreicht.

b) **Berechne** die mittlere Steigung zwischen den Punkten P_3 und P_5, das mittlere Gefälle zwischen den Punkten P_7 und P_9 und den mittleren Anstieg über die gesamte Entfernung von 1,5 km.

c) **Zeichne** im Geländeprofil näherungsweise den Geländepunkt P mit dem größten momentanen Anstieg **ein** und **ermittle** einen Näherungswert für die dazugehörige momentane Steigung.

d) Ein neuer Geländewagen schafft Steigungen von bis zu 68 Grad. Schafft es der Geländewagen theoretisch bis zum höchsten Punkt, wenn dabei allein die Höhe der Steigung eine Rolle spielen soll?

   Begründe Deine Entscheidung. [Hinweis: Denke an die Winkeleinstellung DEG im SET UP!]

e) **Zeichne** mithilfe einer geeigneten Konstruktion den Geländepunkt Q zwischen den Punkten P_7 und P_9 ein, in dem die momentane Steigung genauso groß ist wie das mittlere Gefälle zwischen den Punkten P_7 und P_9.

f) Ab dem Punkt P_{10} fällt das Gelände konstant mit 240 % bis zum einem Punkt P_{11}, der sich in 0 m Höhe befindet.

   Zeichne im obigen Graphen den Geländeverlauf von P_{10} bis P_{11} ein und **gib** die Entfernung des Punktes P_{11} vom Startpunkt P_0 **an**.

Lösungen

2 Mittlere Änderungsraten

1a)	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**
Entfernung x_0	0	2000	4300	**5500**	**7000**	**9000**	**12000**	**12750**	**14400**
Entfernung h	2000	2300	**1200**	**1500**	**2000**	**3000**	**750**	**1650**	
Höhe $f(x_0)$ über NN	120	130	200	**270**	**320**	**360**	**305**	**210**	**120**
Höhenunterschied	10	70	**70**	**50**	**40**	**-55**	**-95**	**-90**	
$\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Entfernung}}$	0,5%	3,04%	**5,83%**	**3,33%**	**2%**	**-1,83%**	**-12,67%**	**-5,44%**	

1b) Der Höhenunterschied ist zwischen Hundskopf und Stiefelshagen mit 95 m am größten.

1c) Beide Strecken sind unterschiedlich anstrengend, weil der Höhenunterschied bezogen auf eine unterschiedliche horizontale Wegstrecke erfolgt. Zwischen Kaltenbach und Weggabelung erfolgt der Höhenunterschied bei einer horizontalen Entfernung von nur 1200 m (statt 2300 m zwischen P_2 und P_3). Sie ist daher anstrengender.

1d) Man untersucht die mittleren Steigungen, die durch den Quotienten aus Höhenunterschied und horizontaler Entfernung zu berechnen sind. Daher ist der Anstieg zwischen P_3 und P_4 mit 5,83% durchschnittlich am anstrengendsten.

1e) Der Term beschreibt die mittlere Steigung (Wert > 0) bzw. das mittlere Gefälle (Wert < 0) zweier Nachbarpunkte.

1f) Es könnte Stellen geben die lokal wesentlich steiler sind als die mittleren Steigungen zwischen zwei Strecken-punkten.

1g) Hier sind unterschiedliche Lösungen möglich. Die steilsten Anstiege sind zwischen P_2 und P_3 und in der Nähe von P_4. Das größte Gefälle ist in der Nähe von P_8.

1h) $m = \frac{8}{100} = \tan(\alpha)$, $\alpha = \tan^{-1}(8\%) \approx 4{,}6°$, $m = -12\% = -\frac{12}{100} = \tan(\beta)$, $\beta = \tan^{-1}(-12\,\%) \approx -6{,}8° \mathrel{\hat{=}} 173{,}2°$

2a) Es haben am dritten Tag 250 – 40 Menschen das Gerücht zu ersten Mal gehört. Am fünften Tag haben am meisten Menschen (5000 – 1370 = 3630 Menschen) das Gerücht zum ersten Mal gehört.

2b) Die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [3; 5] beträgt $\frac{N(5)-N(3)}{5-3} = \frac{5000-250}{2} = 2375$ Menschen pro Tag. Die mittlere Geschwindigkeit vom zweiten bis zum vierten Tag beträgt $\frac{N(4)-N(2)}{4-2} = \frac{1370-40}{2} = 665$ Menschen pro Tag.

2c) Die mittlere tägliche Verbreitungsgeschwindigkeit ist am fünften Tag am größten, da dort die meisten Menschen zum ersten Mal das Gerücht gehört haben. Sie beträgt nach 2a) 1630 Menschen pro Tag.

2d) Bis zum Tag 5 nimmt die Steigung des Graphen bis zu seinem Maximalwert zu, anschließend nimmt die Steigung des Graphen kontinuierlich ab. Daher erfolgt bis zum Tag 5 eine Zunahme der Verbreitungsgeschwindigkeit, bevor anschließend eine Abnahme der Verbreitungsrate beschrieben werden kann.

2e) Am Tag 5 ist die Verbreitungsgeschwindigkeit am größten, da dort der Graph am steilsten ist.

3) Verkehrsdichte oder Verkehrsfluss; Kostenanstieg; Zuflussgeschwindigkeit; Bakterienwachstum oder Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur; Schadstoffanstieg.

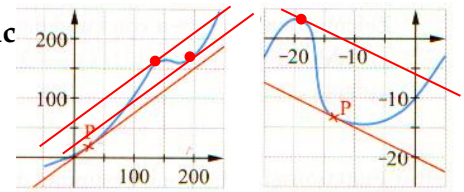
3 Momentane Änderungsraten

Aufgabe 1

1a) $f'(3) \approx 0{,}5$, $f'(2{,}25) \approx 8$, $f'(0) = 1$, $f'(\pi) \approx 0{,}9$, $f'(7{,}25) \approx 0{,}46$

1b) $f'(1{,}75) = 2$, $f'(25) = 0{,}75$, $f'(-3) \approx -0{,}46$, $f'(1250) \approx -0{,}4$

1c

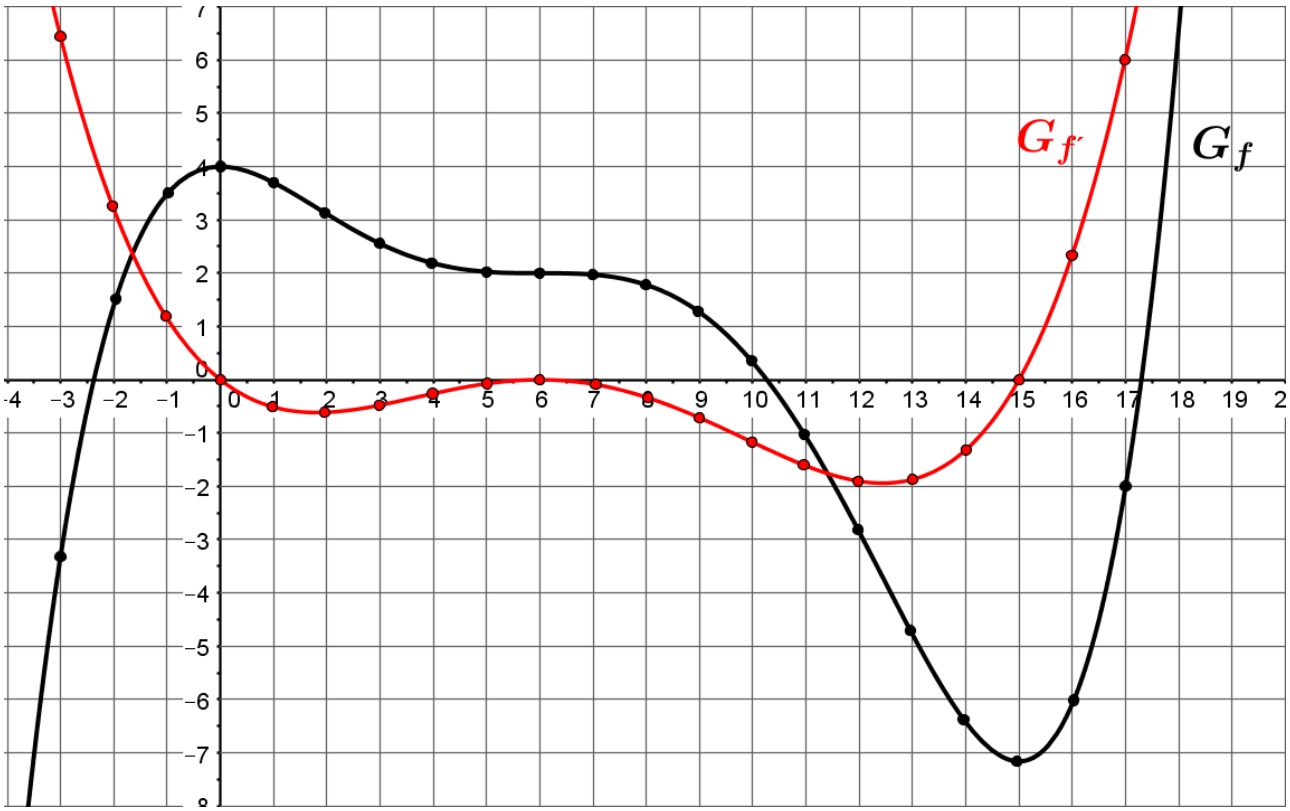


1d) Mögliche Fälle für Tangenten: Tangente …

- hat genau einen Punkt mit dem Graphen gemeinsam (a) Bild 1)
- durchsetzt den Graphen (a) Bild 2)
- schneidet oder berührt den Graphen in einem zweiten oder weiteren Punkten (a) Bild 3, P_5)

Aufgabe 2

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f'(x_0)$	6,5	3,2	1,2	0	-0,4	-0,6	-0,4	-0,2	-0,1	0	-0,1
x_0	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$f'(x_0)$	-0,25	-0,8	-1,1	-1,6	-1,9	-1,9	-1,2	0	2,2	6	



Aufgabe 3

a) $f(1) = 0{,}25$, $P(1/0{,}25)$

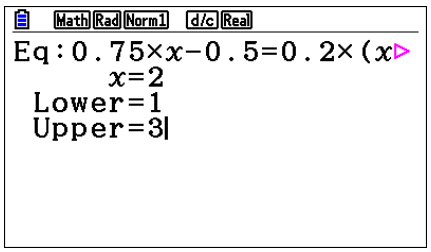
b) $f'(1) = 0{,}75$, Der Steigungswinkel der Tangenten beträgt $\tan^{-1}(0{,}75) \approx 37°$, d.h. das Auto fährt in Richtung $90° - 37° = 53°$ NO.

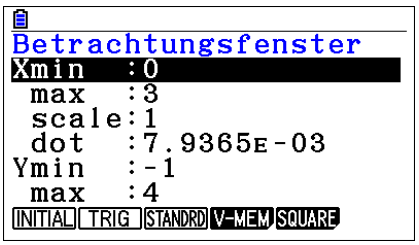
c) $y = 0{,}75x + b$ und $P(1/0{,}25)$ ergeben$0{,}25 = 0{,}75 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -0{,}5$, also: $y = t(x) = 0{,}75x - 0{,}5$

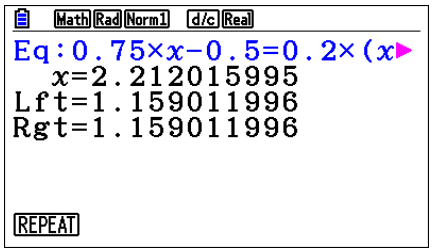
d) Verwende im Menu A (Gleichungen) F3 (Allgemeine Gleichung) und gib die Gleichung

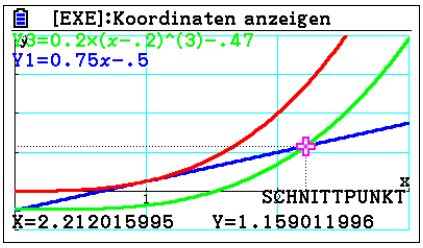
$\mathbf{t(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,75x - 0,5 = 0,2 \cdot (x - 0,2)^3 - 0,47}$ (Abbildungen links)

ein, die für die Schnittpunktberechnung von Tangente und Leitplankengleichung notwendig ist. Setze als Startwert (der sich in der Nähe von der Schnittstelle liegt) x = 2 und als obere und untere Grenzen 1 und 4. Es ergibt sich x ≈ 2,21. Also gilt Q(2,21/1,16). Im Menu 5 (Graph) erhält man eine Lösung nach Eingabe der Funktionsgleichungen und durch Einstellen eines passenden Darstellungsbereichs mit dem Befehl INTSEC die Schnittpunkte von beiden Graphen (Abbildungen rechts).

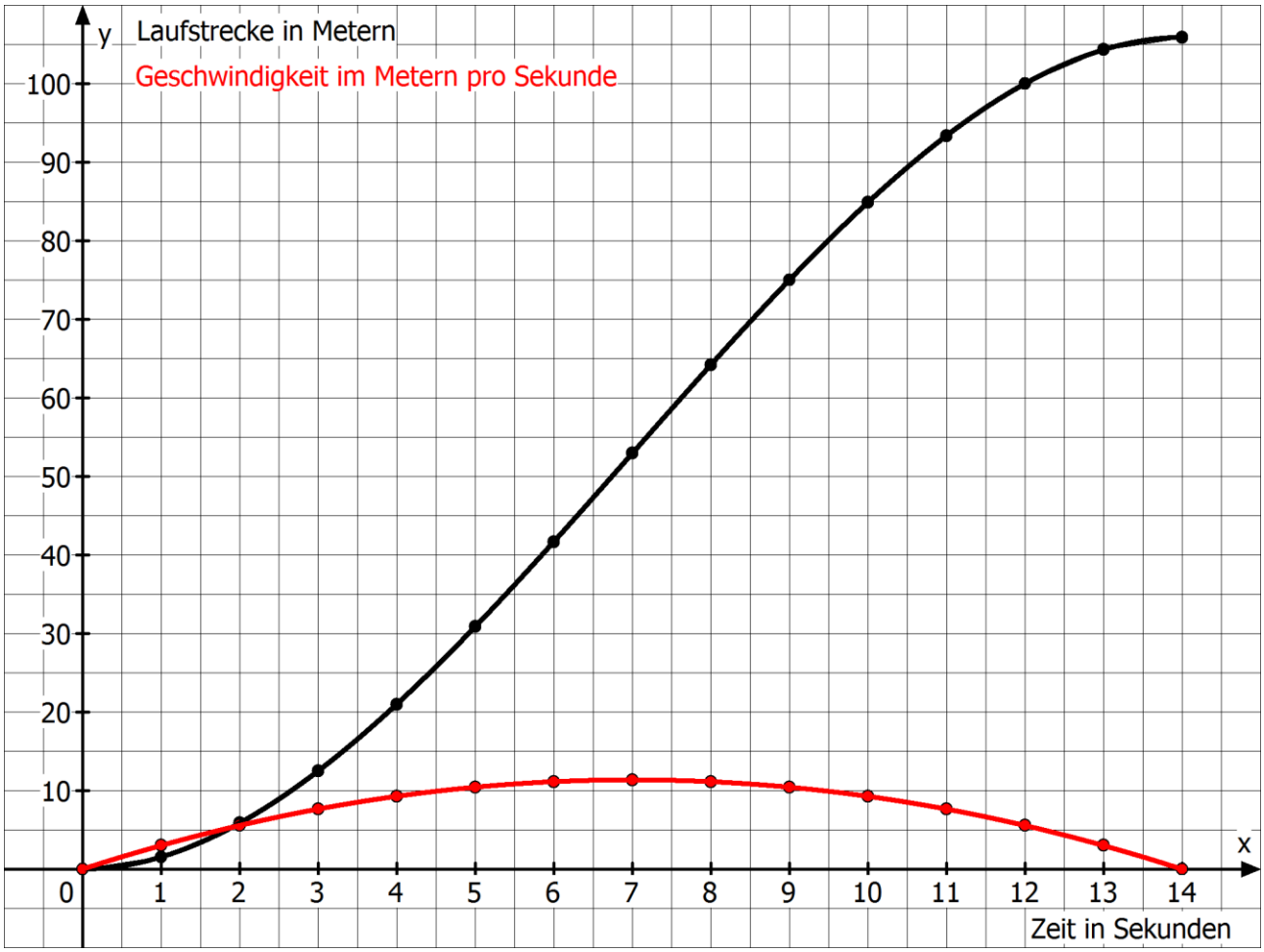




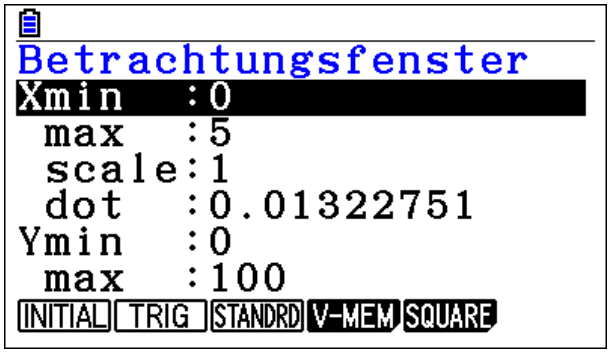


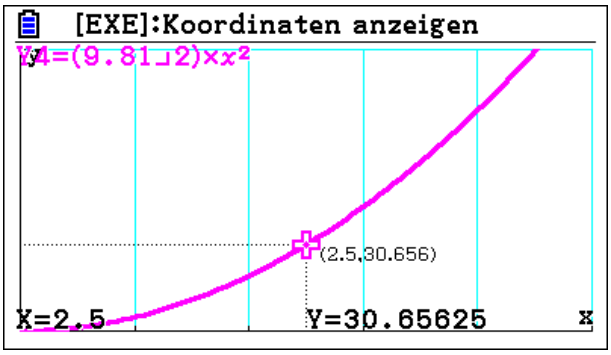


Aufgabe 4



5c) Nach Einstellen des Darstellungsbereichs und Eingabe der Funktionsgleichung erhält man den Parabelast einer nach oben geöffneten Parabel.





5d)

h	$\frac{s(3+h)-s(3)}{h}$ (in Metern pro Sekunde)	$\frac{s(3)-s(3-h)}{h}$ (in Metern pro Sekunde)
1	$\frac{s(4)-s(3)}{1} = 34{,}33$	$\frac{s(3)-s(2)}{1} = 24{,}53$
0,5	$\frac{s(3{,}5)-s(3)}{0{,}1} = 31{,}88$	$\frac{s(3)-s(2{,}5)}{0{,}1} = 26{,}98$
0,1	$\frac{s(3{,}1)-s(3)}{0{,}1} = 29{,}92$	$\frac{s(3)-s(2{,}9)}{0{,}1} = 28{,}94$
0,01	$\frac{s(3{,}01)-s(3)}{0{,}01} = 29{,}48$	$\frac{s(3)-s(2{,}99)}{0{,}01} = 29{,}38$

5e)

(1) Die Terme geben die mittlere Geschwindigkeit über dem Zeitintervall von 3 bis 3 + h bzw. von 3 – h bis 3 an.

(2) Geometrisch entspricht der Term der Steigung der Sekante durch die beiden Punkte (3/s(3)) und (3 + h/s(3 + h) bzw. (3 – h/s(3 – h)) und (3/s(3)).

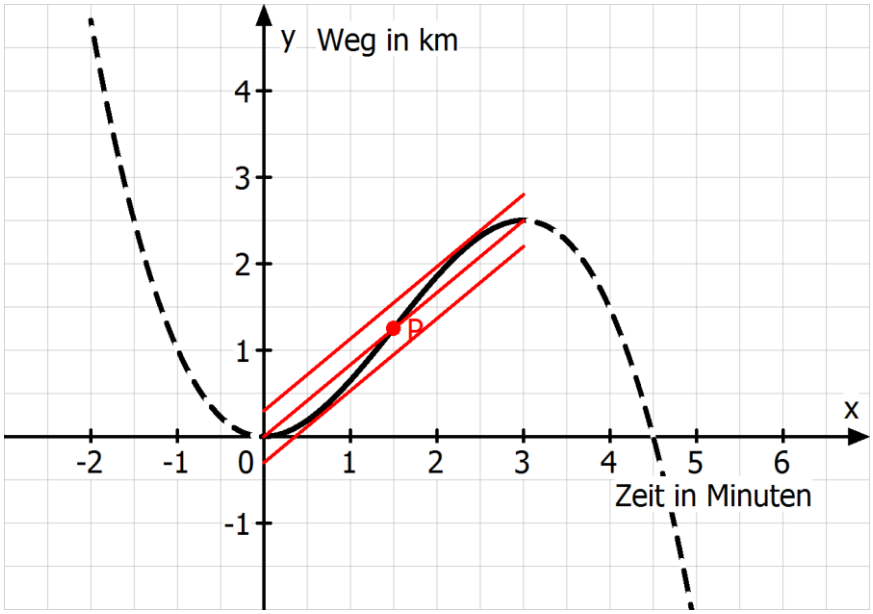
(3) Die Veranschaulichung kann durch ein Steigungsdreieck erfolgen, wobei ΔS = s(3 +h) – s(3) bzw. s(3) – s(3 – h) und Δt = h.

(4) $\frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \frac{4{,}905\cdot(3+h)^2-4{,}905\cdot 3^2}{h} = \frac{4{,}905\left(3^2+6h+h^2\right)-4{,}905\cdot 3^2}{h} = \frac{4{,}905\cdot 3^2+6\cdot 4{,}905\cdot h+4{,}905\cdot h^2-4{,}905\cdot 3^2}{h}$
$= \frac{6\cdot 4{,}905\cdot h+4{,}905\cdot h^2}{h} = 29{,}43 + 4{,}95 \cdot h$. Für sehr kleines h kann der Term 4,95h vernachlässigt werden und man erhält man als Momentangeschwindigkeit des fallenden Autos nach 3 Sekunden 29,43 Meter pro Sekunde. Dies entspricht 29,43 · 3,6 = 105, 948 Kilometer pro Stunde. Damit stimmt die Aussage in der Überschrift.

6a) Peter betrachtet den Quotient aus zurückgelegter Strecke (2,5 km) und benötigter Zeit (3 Minuten). Dies entspricht genau $\frac{2{,}5\text{ km}}{3\text{ min}} = \frac{2{,}5\text{ km}}{\frac{1}{20}\text{km}} = 50\frac{\text{k}}{\text{min}}$. Alternativ kann man auch folgendermaßen argumentieren. Wenn er in 3 Minuten 2,5 km zurücklegt, legt er in 60 Minuten die zwanzigfache Strecke (also 50 km) zurück.

6b) Ohne GTR: Würde er konstant mit 50 km pro Stunde durch den Ort fahren, entspräche der Verlauf einer Geraden mit der Steigung $\frac{2{,}5}{3}$. Durch Parallelverschiebung dieser Geraden, so dass die

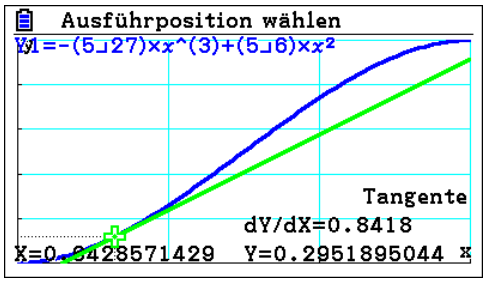
Parallelen Tangenten an den Graphen zum Weg-Zeit-Verlauf des Autos erkennt man, dass zwischen etwa 0,6 Minuten und 2,4 Minuten eine stärke Steigung vorliegt, also eine Geschwindigkeit über 50 km pro Stunde.

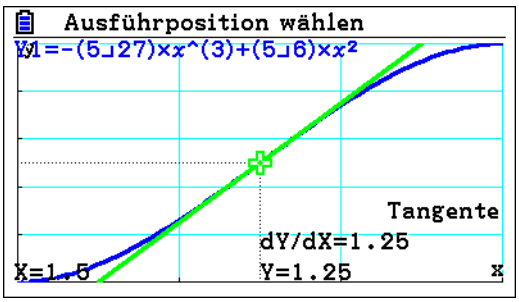


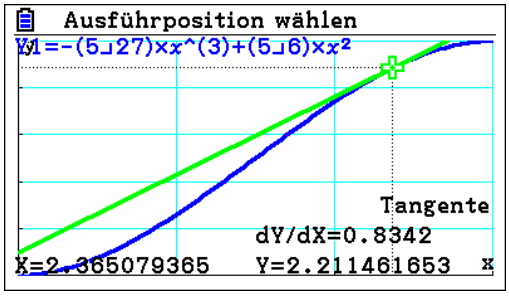
Mit GTR: Im Menu 5 (Graph) wird die Funktionsgleichung eingegeben und das entsprechende Betrachtungsfenster festgelegt. Anschließend gelangt man über SKETCH zum Anzeigen der Tangente. Ist im SET UP die Funktion DERIVATIVE angestellt wird die Steigung der Tangenten angezeigt. Scrollt man nun an die entsprechenden Stellen erkennt man, dass bis ca. 0,63 eine Steigung unter 50 km pro Stunde (entspricht etwa der Steigung 0,83 km pro Minute) vorliegt sowie ab einer Dauer von ca. 2,36 Minuten.

6c) $g(x) = \frac{5}{6}x$

6d) Mithilfe der Spiegelmethode oder dem GTR ergibt sich f´(1,5) = 1,25. Diese Steigung entspricht einer Geschwindigkeit von 75 km pro Stunde, was einen Bußgeldbescheid von 70 € und einen Punkt zur Folge hat.[11]

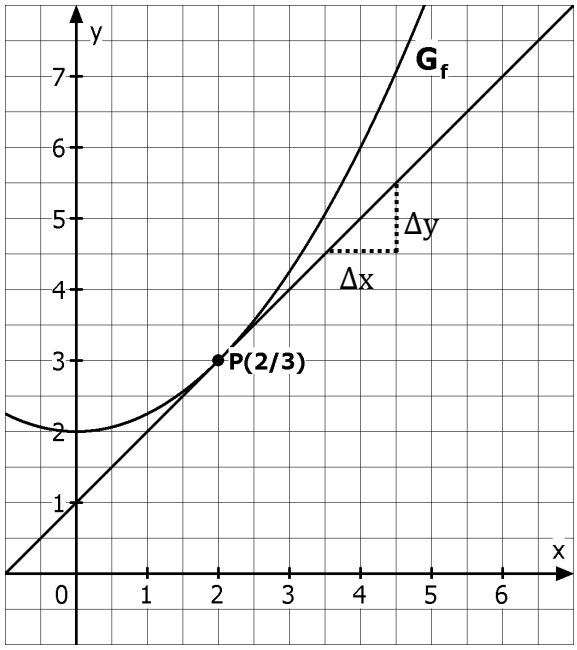


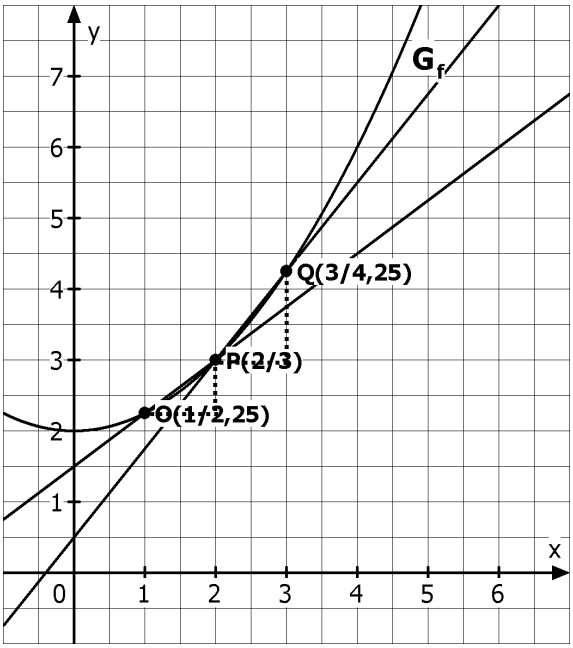




[11] Bußgeldkatalog 2016

7)





7a) Die Tangente hat die Steigung $m_{Tangente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$.

7b) Für die Sekantensteigungen gilt $m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}25}{1} = 1{,}25$ und $m_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75$
Diese Werte sind gute Näherungswerte für die Steigung des Funktionsgraphen im Punkt P (2/3), d. h. für die Steigung der Tangenten im Punkt P.

7c)

(1) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{0{,}25\cdot(2+h)^2+2-3}{h} = \frac{0{,}25\cdot\left(4+4h+h^2\right)+2-3}{h} = \frac{1+h+0{,}25\cdot h^2+2-3}{h} = \frac{h+0{,}25\cdot h^2}{h} = 1 + 0{,}25 \cdot h$

(2) $\frac{f(2)-f(2-h)}{h} = \frac{3-0{,}25\cdot(2-h)^2-2}{h} = \frac{1-0{,}25\cdot\left(4-4h+h^2\right)}{h} = \frac{1-1+h-0{,}25\cdot h^2}{h} = \frac{h-0{,}25\cdot h^2}{h} = 1 - 0{,}25 \cdot h$

(3) Es ergibt sich die folgende Tabelle:

h	Q(2 + h/f(2 + h))	m_{PQ}	h	O(2 – h/f(2 – h))	m_{OP}
1	Q(3/4,25)	1,25	1	O(1/2,25)	0,75
0,5	Q(2,5/ 3,5625)	1,125	0,5	O(1,5/2,5625)	0,875
0,1	Q(2,1/3,1025)	1,025	0,1	O(1,9/2,9025)	0,975
0,01	Q(2,01/3,010025)	1,0025	0,01	O(1,99/ 2,990025)	0,9975

(4) Es gilt: $\lim\limits_{h\to 0} m_{PQ} = 1$ und $\lim\limits_{h\to 0} m_{OP} = 1$, da der Term 0,25h für sehr kleine h vernachlässigt werden kann. Unabhängig davon, von welcher Seite sich der zweite Grafenpunkt dem Punkt P nähert, strebt die Steigung der Sekante gegen 1: Der Graph besitzt im Punkt P(2/3) die Steigung 1. Dieser Wert entspricht der Steigung der Tangenten im Punkt P(2/3) an der Graphen und wird mit f´(2) bezeichnet („Ableitung von f an der Stelle 2“).

7d)

(1) Die Steigung der linkseitigen Sekanten beträgt wegen h < 0: $\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{-h} = \frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Es reicht aus, diesen Term für eine Näherung von rechts und von links zu betrachten, da sowohl positives h als auch negatives h bei der Grenzwertbildung beliebig klein werden können.

(2) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{0{,}25\cdot(x_0+h)^2+2-0{,}25\cdot x_0{}^2-2}{h} = \frac{0{,}25\cdot\left(x_0{}^2+2x_0h+h^2\right)+2-0{,}25\cdot x_0{}^2-2}{h} =$
$\frac{0{,}25\cdot x_0{}^2+0{,}5\cdot x_0h+0{,}25\cdot h^2-0{,}25\cdot x_0{}^2}{h} = \frac{0{,}5\cdot x_0h+0{,}25\cdot h^2}{h} = 0{,}5\cdot x_0 + 0{,}25\cdot h.$

(3) Durch Grenzwertbildung ergibt sich $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(0{,}5\cdot x_0 + 0{,}25\cdot h) = 0{,}5\cdot x_0$. Dieser Grenzwert entspricht der Tangentensteigung an den Grafen an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Die Tangentensteigungsfunktion bzw. Ableitungsfunktion lautet also: $f'(x) = 0{,}5x$.

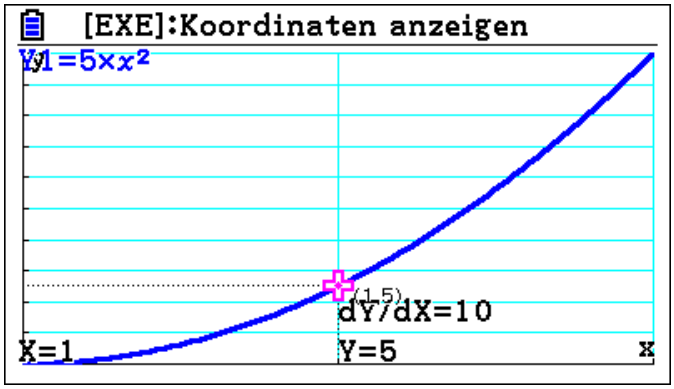
8a) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0{}^2}{h} = \frac{x_0{}^2+2x_0h+h^2-x_0{}^2}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0 + h$. Daher gilt für die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$.

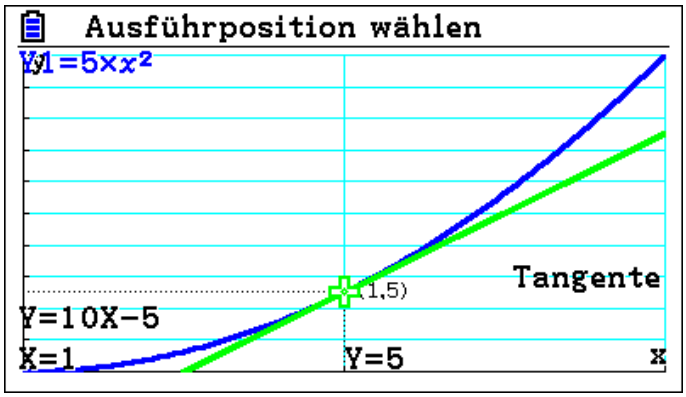
8b) Setzt man 1 in f´ ein erhält man $f'(1) = 2$. Für die Tangentengleichung gilt daher $t(x) = 2x + b$. Setzt man di Koordinaten des Berührpunktes $(1/f(1) = 1)$ in die Gleichung der Tangente ein ergibt sich $1 = 2 \cdot 1 + b$ also $b = -1$, also $t(x) = 2x - 1$.

9a) $20 = 5 \cdot t^2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2$

9b) Wähle z. B. den Darstellungsbereich $0 \le x \le 2$ und $0 \le y \le 20$

9c) Die Tangente an der Stelle 2 hat eine Steigung mit dem Wert 10 und entspricht der Steigung des Graphen im Punkt (1/5). Herleitung der Tangentengleichung: $y = 10x + b$ und (1/5) liegt auf der Tangente $\Rightarrow 5 = 10 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5 \Rightarrow y = 10x - 5$.





9d) Die Tangentensteigung im Punkt (1/5) entspricht der momentanen Geschwindigkeit des Turmspringers nach 1 Sekunde.

9e) $\frac{s(1+h)-s(1)}{h} = \frac{5\cdot(1+h)^2-5}{h} = \frac{5\cdot(1+2h+h^2)-5}{h} = \frac{5+10h+5h^2-5}{h} = \frac{10h+5h^2}{h} = 10 + 5h \xrightarrow[h\to 0]{} 10 = s'(1)$. Statt des Ausdrucks $\lim\limits_{h\to 0}(10 + 5h) = 10$ schreibt man auch $10 + 5h \xrightarrow[h\to 0]{} 10$ und liest „10 + 5h strebt für h gegen Null gegen 10.“

9f) $\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{5\cdot(t+h)^2-5\cdot t^2}{h} = \frac{5\cdot(t^2+2th+h^2)-5\cdot t^2}{h} = \frac{5\cdot t^2+10th+5h^2-5\cdot t^2}{h} = \frac{10th+5h^2}{h} = 10t+5h \xrightarrow[h\to 0]{} 10t =$ $s'(t)$ = momentane Geschwindigkeit des Springers nach t Sekunden.

9g) Der Turmspringer hat nach 1 Sekunde eine momentane Geschwindigkeit von 10 Meter pro Sekunde (= 36 km pro Stunde), nach t Sekunden eine momentane Geschwindigkeit von 10t.

9h) Da der Springer nach 2 Sekunden ins Wasser eintaucht, hat er eine momentane Eintauchgeschwindigkeit von 20 Meter pro Sekunde (= 72 km pro Stunde!!!).

4 Ableitungsregeln und höhere Ableitungen

1a)

$f(x) =$	x	x^2	x^3
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$	$\frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$	$\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$ $= \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}$ $= \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0+h$	$\frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h}$ $= \frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-x_0^2}{h}$ $= \frac{3x_0^2h+3x_0h^2+h^3}{h}$ $= 3x_0^2+3x_0h+h^2$
$f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$	1	$2\cdot x_0$	$3\cdot x_0^2$

Vermutung: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

1b)

$f(x) =$	c	$2x^2$	$x^2 + x$
$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$	$\frac{c-c}{h} = 0$	$\frac{2(x_0+h)^2-2x_0^2}{h}$ $= \frac{2x_0^2+4x_0h+2h^2-2x_0^2}{h}$ $= \frac{4x_0h+2h^2}{h} = 4x_0+2h$	$\frac{(x_0+h)^2+x_0+h-x_0^2-x_0}{h}$ $= \frac{x_0^2+2x_0h+h^2+h-x_0^2}{h}$ $= \frac{2x_0h+h+h^2}{h} = 2x_0+1+h$
$f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$	0	$4\cdot x_0$	$2x_0+1$

Vermutungen: $f(x) = k\cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k\cdot g'(x)$ und $f(x) = g(x)+h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)+h'(x)$

1c)

1 Potenzregel: $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$. Beispiel: $f(x) = x^{11} \Rightarrow f'(x) = 11\cdot x^{10}$
2 Konstantenregel: Für $k\in\mathbb{R}$ gilt $k' = 0$. Beispiel: $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$
3 Faktorregel: $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$ $(c\in\mathbb{R})$. Beispiel: $h(x) = 5\cdot x^{11} \Rightarrow h'(x) = 5\cdot 11\cdot x^{10} = 55\cdot x^{10}$
4 Summenregel: $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$. Beispiel: $h(x) = 5\cdot x^3+4\cdot x^2 \Rightarrow h'(x) = 10\cdot x^2+8\cdot x$

(1) $f'(x) = 8x^7$ (1)
(2) $f'(x) = 1$ (1)
(3) $f'(x) = x$ (1, 3)
(4) $f'(x) = 0{,}6\,x^5$ (1, 3)
(5) $f'(x) = 0$ (2)
(6) $f'(x) = (n+1)\cdot x^n$ (1)
(7) $f'(a) = 4x^4a^9$ (1, 3)
(8) $f'(x) = 48\,x^7$ (1, 3)
(9) $f'(x) = x^9$ (1, 3)
(10) $f'(x) = 0{,}5$ (1, 3)
(11) $f'(x) = 9\,x^2+3\,x^4-1$ (1, 3, 4)
(12) $f'(x) = 8x^7+2x$ (1, 4)
(13) $f'(x) = 3x^2+1$ (1, 4)
(14) $f'(x) = 4x^3-2x$ (1, 2, 4)
(15) $f'(x) = 11x^{10}-9x^8+1$ (1, 2, 4)
(16) $f'(z) = 101z^{100}+1$ (1, 2, 4)
(17) $f'(a) = 1$ (1, 2, 4)
(18) $f'(y) = 4y^3-3y^2+2y-1$ (1, 2, 4)

1d)

Es gilt f (x) – g(x) = f(x) + (-1) · g(x). Daher gilt nach Faktor und Summenregel [f(x) – g(x)]´ = f´(x) + (-1) · g´(x) = f´(x) – g´(x)

1e)

Die **Summenregel** besagt, dass die Momentansteigung der Summe zweier Funktionen an einer bestimmten Stelle gleich der Summe der einzelnen Momentansteigungen an derselben Stelle ist. Anschaulich liegt das daran, dass sich im Differenzenquotient bei gleichem Δx = h der Wert für Δy aus der Summe der Differenzen der Einzelfunktionen zusammensetzt. Die **Faktorregel** impliziert, dass die Momentansteigung der mit dem Faktor c multiplizierten Funktion an einer Stelle c-mal so groß ist wie die Momentansteigung der Einzelfunktion an derselben Stelle. Die geometrische Begründung basiert auf der Tatsache, dass im Differenzenquotient bei gleichem Δx = h der Wert für Δy mit dem Faktor c multipliziert wird. Die **Konstantenregel** ist anschaulich klar, da der Graph einer konstanten Funktion an jeder Stelle die Steigung Null hat, also Graph der Nullfunktion darstellt.

1f)

Summenregel: Es gelte $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ und $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$. Zu zeigen ist, dass gilt: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$. Betrachte den Differenzenquotient von f + g an der Stelle x_0: $\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0) + g'(x_0)$, q. e. d.
Faktorregel: Es gelte $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ und sei $c \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass gilt: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(c\cdot f)(x_0+h)-(c\cdot f)(x_0)}{h} = c\cdot f'(x_0)$. Betrachte den Differenzenquotient von c · f an der Stelle x_0: $\frac{(c\cdot f)(x_0+h)-(c\cdot f)(x_0)}{h} == \frac{c\cdot f(x_0+h)-c\cdot f(x_0)}{h} = c\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} c\cdot f'(x_0)$, q. e. d.

1g)

1 gehört zu C: Eine nach oben geöffnete Parabel ist Graf einer quadratischen Funktion, deren Ableitungsgraf eine steigende Gerade sein muss, da beim Ableiten sich der Grad um 1 reduziert und die Gerade im fallenden Bereich der Parabel im negativen Bereich liegen muss.

Mit der analogen Begründung gehört A zu 3, da der Ableitungsgraf einer nach unten geöffneten Parabel eine fallende Gerade sein muss.

2 gehört zu D, da aufgrund des Verhaltens im Unendlichen D einen geraden Grad besitzen muss und 2 einen ungeraden. Darüber hinaus stimmen die Nullstellen von 2 mit den Extremstellen von D überein.

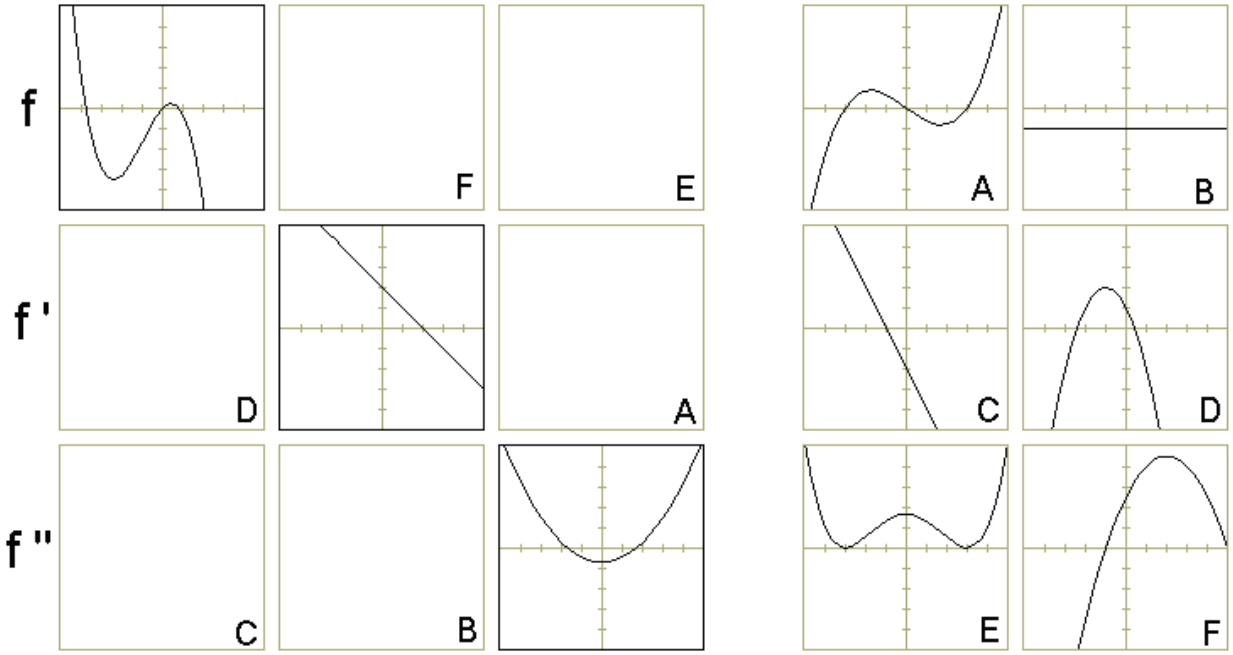
4 gehört zu B mit den analogen Begründungen wie bei 2 und D: 4 und B haben wegen des Verhaltens im Unendlichen geraden und ungeraden Grad, Extremstellen von B entsprechen den Nullstellen von 4.

2a)

$f(x)$	=	$x^3 + x^2 - x + 1$	$f(x)$	=	$0{,}25\,x^8 - x^7 + \pi$
$f'(x)$	=	$\mathbf{3x^2 + 2x - 1}$	$f'(x)$	=	$\mathbf{2x^7 - 7x^6}$
$f''(x)$	=	$\mathbf{6x + 2}$	$f''(x)$	=	$\mathbf{14x^6 - 42x^5}$
$f'''(x)$	=	$\mathbf{6}$	$f'''(x)$	=	$\mathbf{84x^5 - 210x^4}$
$f^{(4)}(x)$	=	$\mathbf{0}$	$f^{(6)}(x)$	=	$\mathbf{5040x^2 - 5040x}$

$f(x)$	$=$	$x(x^2 + 7) =$ **$x^3 + 7x$**	$f(x)$	$=$	$x^2(x - 2)^2 =$ **$x^4 - 2x^3 + x^2$**
$f'(x)$	$=$	**$3x^2 + 7$**	$f'(x)$	$=$	**$4x^3 - 6x^2 + 2x$**
$f''(x)$	$=$	**$6x$**	$f''(x)$	$=$	**$12x^2 - 12x + 2$**
$f'''(x)$	$=$	**6**	$f'''(x)$	$=$	**$24x - 12$**
$f^{(8)}(x)$	$=$	**0**	$f^{(4)}(x)$	$=$	**24**

2b)

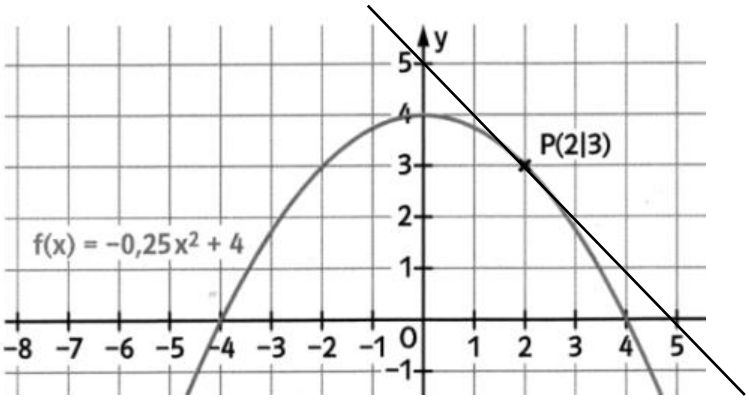


Argumente können z. B. sein: Extremstellen von f´ sind Nullstellen von f“, Extremstellen von f sind Nullstellen von f´, Grad der Funktion muss sich beim Ableiten immer um 1 reduzieren, Graf von f steigt (fällt) → Graf von f´ liegt oberhalb (unterhalb) der x-Achse

5 Kontrollaufgaben

Hilfsmittelfrei

1a) $t(x) = -x + 5$



1b) $f'(x) = -0{,}5x$. Dabei wurden die Potenzregel (für x^2), die Faktorregel (für den Vorfaktor –0,25), die Summenregel (für die beiden Summanden $-0{,}25x^2$ und 4) und die Konstantenregel (für 4) angewendet.

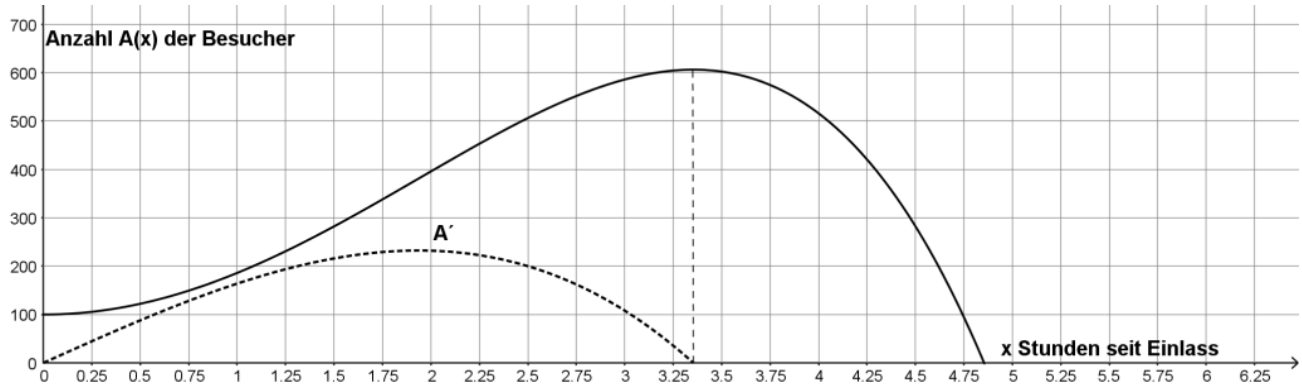
1c) $m_{\text{Tangente}} = f'(2) = -0{,}5 \cdot 1 = -1$. Berechnung der dazugehörigen Tangentengleichung t(x): $t(x) = -x + b$; $3 = -2 + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow t(x) = -x + 5$

2a) $A(1) = -4 + 90 + 100 = 186$ Besucher

2b) $\frac{A(3)-A(1)}{3-1} = \frac{586-186}{2} = 150\,\frac{\text{Besucher}}{\text{Stunde}}$

2c) $A'(x) = -16x^3 + 180x$ und $A'(1) = 164\,\frac{\text{Besucher}}{\text{Stunde}}$. Um 16 Uhr beträgt der momentane Besucherandrang 164 Besucher pro Stunde.

2d)



Nullstellen von A´ bei 0 und etwa 3,35 (2P), Maximumstelle von A´ liegt etwa bei 2 (1,75 bis 2,25 wird akzeptiert). Besonders genau ist die Darstellung, wenn mithilfe der Spiegelmethode die Steigung der Tangente berechnet wird, um das globale Maximum von A´ zu bestimmen (ca. 232 Besucher pro Stunde).

Aufgaben unter Nutzung von Hilfsmitteln

3a) $s(t) = \frac{g}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2 = \frac{10}{2} \cdot \sin(30) \cdot t^2 = 5 \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = 2{,}5 \cdot t^2$

3b) $s(3) = 2{,}5 \cdot 3^2 = 22{,}5$ [m]

3c) $s(3) - s(2) = 22{,}5 - 2{,}5 \cdot 2^2 = 12{,}5$ [m]

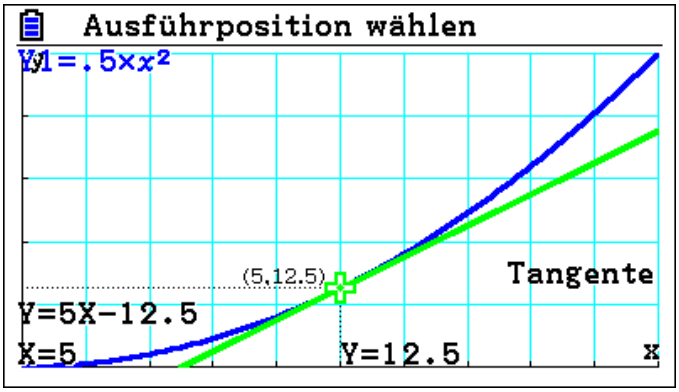
3d) $v_{[2;3]} = \frac{s(3)-s(2)}{3-2} = \frac{12{,}5}{1} = 12{,}5\ [\frac{m}{s}]$

3e) $v_{[2;2+h]} = \frac{s(2+h)-s(2)}{h} = \frac{2{,}5\cdot(2+h)^2-10}{h} = \frac{2{,}5\cdot(4+4h+h^2)-10}{h} = \frac{10+10h+2{,}5h^2-10}{h} = 10 + 2{,}5h \xrightarrow[h\to 0]{} 10$
Die momentane Geschwindigkeit der Lawine beträgt nach 2 Sekunden 10 m pro Sekunde. Dies sind 36 km pro Stunde.

3f) $s'(t) = 2{,}5 \cdot 2 \cdot t = 5t = v(t)$ beschreibt die Momentangeschwindigkeit der Lawine nach t Sekunden.

3g) 305 km pro Stunde sind $84\frac{13}{18}$ (= 305 : 3,6) Meter pro Sekunde. Mit dem Ansatz $84\frac{13}{16} = 5t$ ergibt sich $t = 16\frac{17}{18}$ Sekunden. Setzt man diesen t-Wert in die Funktion s ein, erhält man für die zurückgelegte Strecke bis zu einer Geschwindigkeit von 305 km pro Stunde: $s\left(16\,\frac{17}{18}\right) = 2{,}5 \cdot \left(16\,\frac{17}{18}\right)^2 \approx$ 717,79 m.

3h) Lasse zunächst die Funktion zur x(t) unter Menu (Graph) mit entsprechendem Darstellungsbereich zeichnen. Anschließend kann mit Sketch und Tangent die Tangente eingezeichnet werden. Die Steigung beträgt an der Stelle 5 gleich 5. Durch nochmaliges Drücke von EXE wird die Tangentengleichung angezeigt. Rechnerisch gilt:
$x'(t) = 0{,}5 \cdot 2 \cdot t = t$, also $x'(5) = 5$.



3i) $x'(5)$ = Momentangeschwindigkeit der Lawine nach 5 Sekunden. Bestimmung der Tangentengleichung: $12{,}5 = 5 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -12{,}5 \Rightarrow y = 5x - 12{,}5$. Ansatz für die Bestimmung des Neigungswinkels: $\frac{10}{2} \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot t^2 \Leftrightarrow \sin(\alpha) = 0{,}1 \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}1) \approx 5{,}74°$.

4a) a1) Höhe des höchsten Punkts: 500 m a2) Höhe 250 m vom Punkt P_0 entfernt: 220 m a3) Horizontalentfernung, wenn Gelände erstmalig 300 m erreicht: 500 m.

4b) Mittlere Steigung zwischen P_3 und P_5: $\frac{460-300}{750-500} = \frac{160}{250} = \frac{16}{25} = 64$ %. Mittleres Gefälle zwischen P_7 und P_9: $\frac{380-500}{1350-1050} = \frac{-120}{300} = -\frac{2}{5} = -40$ %. Mittlere Steigung zwischen P_0 und P_{10}: $\frac{120}{1500} = \frac{4}{50} = 8$ %.

4c) Der größte Anstieg ist zwischen den Punkten P_4 und P_5, da dort der Graph am steilsten ist. Legt man an der steilsten Stelle eine Tangente an erhält man eine Steigung von deutlich mehr als 300 %.

4d) tan (68°) ≈ 248 % ist deutlich unter 300 %. Daher wird der Geländewagen nur bis Punkt P_4 kommen, auch wenn die mittlere Steigung zwischen P_4 und P_5 nur 240 % beträgt.

4e) Zeichne zur Strecke $\overline{P_7P_9}$ eine Parallele, die das Geländeprofil im gesuchten Punkt Q berührt.

4f) Die Entfernung des Punktes P_{11} vom Startpunkt P_0 beträgt 1550 m, da für das Gefälle von P_{10} bis P_{11} dann gilt: $-120 : 50 = -2{,}4 = -240$ %.