1) Freiwurfquote im Basketball (modifiziert nach HT 2008)

In Untersuchungen mit Sportlern wurden Schätzwerte für Fehlerwahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen Situationen ermittelt. Ziel war es, mögliche Fehler durch zielgerichtetes Training weitgehend auszuschließen.

	Situation	Fehlerwahrscheinlichkeit
A	Einfache und häufig durchgeführte Aufgabe	0,001
B	oft geübte Aufgabe unter Zeitdruck	0,01
C	schwierige Aufgabe	0,1
D	schwierige Aufgabe unter Stress	0,3

a) In welcher der beschriebenen Situationen ist die Fehlerwahrscheinlichkeit $1 \cdot 10^{-2}$?

b) Ein Basketballspieler hat im Training eine Trefferquote von 90% bei Freiwürfen. Welcher der Situationen entspricht dies? Notiere den zugehörigen Buchstaben.

c) Schwierige Aufgaben unter Stress werden von Sportlern mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0,3 ausgeführt. Beurteile, ob die folgenden Aussagen stimmen. Kreuze an.

Das bedeutet, dass …	stimmt	stimmt nicht
… es in **etwa** 30% der Fälle zu einem Fehler kommt.		
… die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1}$ beträgt.		
… 30 Fehler gemacht werden.		
… in 3 von 10 Fällen **sicher** ein Fehler auftritt.		

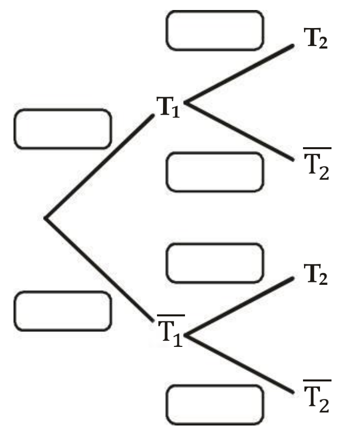
d) In einem Spiel erhält ein Spieler zwei Freiwürfe. Seine Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Freiwurf in diesem Spiel beträgt stressbedingt nur noch 70 %.

(d1) Trage in die Kästchen die Wahrscheinlichkeiten für die Äste ein.

(d2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler bei beiden Freiwürfen trifft? Notiere deine Rechnung.

(d3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er nur einmal treffen? Notiere deine Rechnung.

(d4) Gib einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spieler keine fünf Treffer in Folge erreicht.



T_1:Treffer beim 1. Freiwurf
$\overline{T_1}$:kein Treffer beim 1. Freiwurf
T_2:Treffer beim 2. Freiwurf
$\overline{T_2}$:kein Treffer beim 2. Freiwurf

e) In einer NBA-Spielstatistik des Jahres 1999/2000 fällt auf, dass nur sechs Prozent eine Trefferquote von mehr als 85% haben, zwei Drittel haben eine Trefferquote von weniger als 75% und jeder vierte Basketballer verfehlte mindestens jeden dritten Freiwurf. Wie viel Prozent der NBA-Spieler haben eine Trefferquote zwischen 66,7% und 75%? Wie viel Prozent treffen im Schnitt zwischen 75% und 85%? Schreibe Deine Rechenwege auf.

2) Blutuntersuchungen (modifiziert nach NT 2008)

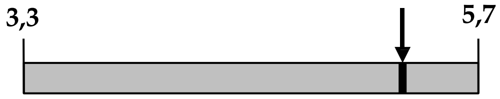
Die Tabelle zeigt das Ergebnis einer Blutuntersuchung. Es wurden die Blutbestandteile A bis H untersucht.

Substanz	Messwert	Richtwerte
A	66,4	58,0 - 70,0
B	9,7	7,0 - 13,0
C	14,9	10,0 - 19,0
D	7,1	6,2 - 8,5
E	1,7	0 - 1,0
F	26	0 - 24
G	99	0 - 200
H		

a) Welche Messwerte liegen außerhalb der Richtwerte? Notiere die entsprechenden Lösungsbuchstaben.

Zusätzlich werden die Ergebnisse grafisch dargestellt. Der fette Strich (Pfeil) stellt den Messwert dar. Die Werte links und rechts sind die Richtwerte.

b) Bestimme mit Hilfe der Abbildung 1 den Messwert (Pfeil) und die beiden Richtwerte für die Substanz H und trage die Werte in die Tabelle ein. Notiere deine Rechnung.

Abbildung 1: 

c) Trage den Messwert für die Substanz A als Strich in die Grafik der Richtwerte (Abbildung 2) ein. Notiere deine Rechnung.

Abbildung 2: 

d) Dem Arzt gefällt insbesondere der Wert für die Substanz E nicht. Um wie viel Prozent wird der obere Richtwert überschritten? Notiere deine Rechnung.

e) Der erhöhte Wert für die Substanz E weist auf eine Erkrankung hin. Im Gespräch erklärt der Arzt, dass von 1 000 Personen 25 Personen an dieser Krankheit leiden.

(e1) In Nordrhein-Westfalen wohnen ungefähr 18 000 000 Menschen. Wie viele Personen sind in Nordrhein-Westfalen nach diesen Angaben von dieser Krankheit betroffen? Notiere deine Rechnung.

(e2) Der Test zum Nachweis eines erhöhten Wertes von Substanz E ist nicht in allen Fällen genau. Eine tatsächlich erkrankte Person wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% erkannt. Man nennt diese Prozentzahl auch **Sensitivität**. Aber auch bei gesunden Personen zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% eine Krankheit (= positiver Test) an. Fülle dazu die folgende Vierfelder-Tafel aus.

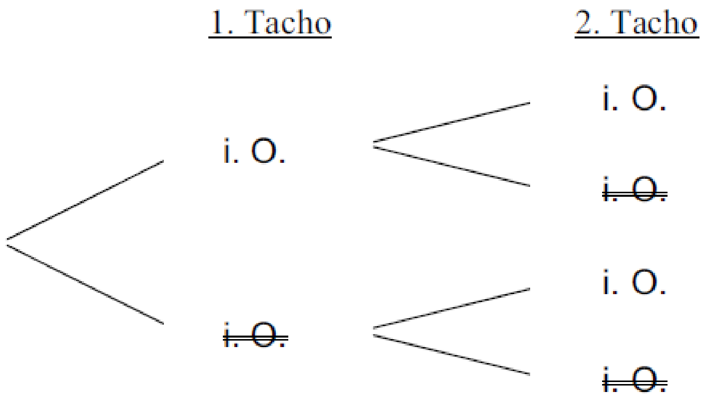
	erkrankt (K)	nicht erkrankt ($\overline{K}$)	Gesamt
positiver Test (+)			
negativer Test (—)			
Gesamt			18000000

(e3) Zeichne auch ein zweistufiges Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person ein positives Testergebnis erhält. Wie kannst Du diese Wahrscheinlichkeit mit der Vierfelder-Tafel berechnen?

3) Inspektion eines Tachos (HT 2009)

In einer Werkstatt werden Tachos überprüft. Die Prüfer wissen aus Erfahrung, dass 95 % aller Tachos in Ordnung („i. O.“) sind. Heute müssen sie zwei Tachos überprüfen.

a) Trage im Baumdiagramm an allen Zweigen die Wahrscheinlichkeiten ein.



b) Wie wahrscheinlich ist es, dass beide Tachos in Ordnung sind? Notiere deine Rechnung.

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein Tacho in Ordnung ist und der andere nicht? Notiere deine Rechnung.

4) Fußball-WM 2011 (modifiziert nach HT 2011)

Vom 26. Juni bis zum 17. Juli 2011 fand die Fußball-Weltmeisterschaft der Frauen in Deutschland statt. Die 32 Spiele der WM finden in 9 verschiedenen Städten statt (vgl. Tabelle):

Stadt	**Zuschauerplätze**	**Anzahl der WM-Spiele**
Augsburg	25 597	4
Berlin	74 244	1
Bochum	23 000	4
Dresden	27 190	4
Frankfurt	49 240	4
Leverkusen	30 000	4
Mönchengladbach	46 297	3
Sinsheim	25 641	4
Wolfsburg	25 361	4

a) Bestimme für die neun WM-Stadien die Spannweite, den Median und den Mittelwert der Zuschauerplätze.

b) Zeige, dass zu den 32 WM-Spielen insgesamt maximal 1 037 251 Zuschauer in die Stadien kommen können.

c) In einer Pressemitteilung steht:

> Der Deutsche Fußball-Bund (DFB) als Veranstalter kalkuliert bei den 32 Spielen mit einer durchschnittlichen Auslastung von 80 Prozent, was einem Zuschauerschnitt pro Spiel von 25 000 entspricht. Insgesamt rechnet der DFB mit Erlösen in Höhe von 27 Millionen Euro aus dem Verkauf der Eintrittskarten.

(c1) Von welchem durchschnittlichen Preis pro Eintrittskarte geht die Pressemitteilung aus? Notiere deine Rechnung.

(c2) Überprüfe die Angabe zum Zuschauerschnitt anhand der Daten aus der Tabelle.

d) An einem Schülerinnen-Turnier nehmen 16 Schulen teil, die die 16 WM-Mannschaften repräsentieren sollen. Aus Zeitgründen wird aber keine Vorrunde, sondern direkt nach dem „K.-o.-System" gespielt: Wer ein Spiel gewinnt, bleibt im Turnier. Wer verliert, scheidet aus. Die Begegnungen des Turniers werden ausgelost.

(d1) Wie viele Spiele müssen insgesamt bei diesem Turnier gespielt werden? Begründe deine Antwort.

(d2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mannschaft „Deutschland" in der ersten Runde die Mannschaft „Brasilien" als Gegner zugelost wird?

5) Wetterlage (NT 2011)

Aufgrund der langjährigen Wetterstatistik geht man bei einer Stadt von folgenden Wahrscheinlichkeiten für den Wetterwechsel aus.

… folgt ein / auf einen …	sonniger Tag	wechselhafter Tag	regnerischer Tag
sonnigen Tag	45 %	30 %	25 %
wechselhaften Tag	35 %	25 %	40 %
regnerischen Tag	20 %	40 %	40 %

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass auf einen regnerischen Tag **nicht** wieder ein regnerischer Tag folgt?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass auf einen sonnigen Tag zwei weitere sonnige Tage folgen? Notiere deine Rechnung.

6) Gepäckkontrolle (NT 2011)

a) In der Urlaubszeit werden am Frankfurter Flughafen pro Tag etwa 220 000 Gepäckstücke befördert. Pro Jahr sind es rund 40 Millionen Gepäckstücke. Ungefähr 2,9% aller Gepäckstücke werden zunächst fehlgeleitet. Jedes fehlgeleitete Gepäckstück verursacht Kosten, die durchschnittlich 670 € betragen. In 95% der Fälle wird ein fehlgeleitetes Gepäckstück innerhalb von 5 Tagen wiedergefunden.

(a1) Um wie viel Prozent liegt die Anzahl der Gepäckstücke pro Tag in der Urlaubszeit ungefähr über dem Jahresdurchschnitt? Notiere deine Rechnung.

(a2) Zeige, dass am Frankfurter Flughafen pro Jahr ungefähr 1 160 000 Gepäckstücke fehlgeleitet werden.

(a3) Wie hoch sind die Kosten, die pro Jahr durch fehlgeleitete Gepäckstücke entstehen? Notiere deine Rechnung.

(a4) Wie viel fehlgeleitete Gepäckstücke pro Jahr werden nicht innerhalb von 5 Tagen wieder- gefunden? Notiere deine Rechnung.

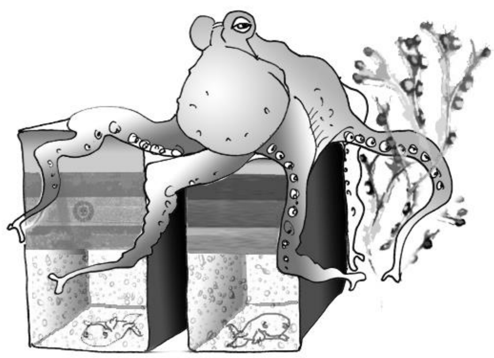
b) Bevor der Fluggast ein Flugzeug betreten darf, wird sein Handgepäck kontrolliert. Die Kontrolle verläuft in folgenden Schritten:

1. Kontrolle: Durchleuchtung des Gepäcks	Dauer: 10 Sekunden
In 25 % der Fälle erscheint das Gepäck nicht sicher und muss noch einmal kontrolliert werden:	
2. Kontrolle: erneutes Durchleuchten	Dauer: 13 Sekunden
In 40 % dieser Fälle gibt es immer noch Zweifel daran, dass sich keine verbotenen Gegenstände im Gepäck befinden. Das Gepäckstück muss geöffnet werden und wird von Hand kontrolliert:	
3. Kontrolle: Gepäckinspektion durch Mitarbeiter	Dauer: 4 Minuten
Die Zeit zwischen zwei Kontrollvorgängen beträgt 30 Sekunden.	

(b1) Wie lange dauert eine Kontrolle, wenn alle 3 Kontrollschritte durchlaufen werden müssen? Notiere deine Rechnung.

(b2) Wie groß ist der Anteil der Gepäckstücke, die alle 3 Kontrollschritte durchlaufen müssen? Notiere deine Rechnung.

7) Krake Paul (HT 2012)



Bei der Fußball-WM 2010 wurde der Krake Paul international berühmt. Vor jedem Fußballspiel wurden zwei Futterboxen in sein Aquarium gesenkt. Die Boxen waren mit der jeweiligen Flagge der beiden Länder beklebt, deren Mannschaften gegeneinander spielten. Paul suchte sich einen der beiden Futtertöpfe aus. Seine Wahl wurde dann von den Medien als „Vorhersage“ des Gewinners des Fußballspiels gedeutet. Da Paul alle Spiele der deutschen Nationalmannschaft richtig voraussagte, wurde er ein richtiger Medienstar.

Gehe davon aus, dass Pauls „Vorhersagen“ zufällig geschehen sind. Mathematisch betrachtet handelt es sich bei den „Vorhersagen“ also um einen Zufallsversuch mit zwei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.

a) Erkläre, wie man diesen Zufallsversuch mithilfe eines Würfels simulieren kann.

b) Zeichne ein Baumdiagramm, das die Wahrscheinlichkeiten für zwei Vorhersagen angibt.

c) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Paul zwei Spiele hintereinander richtig tippt, $\frac{1}{4}$

beträgt.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Paul bei zwei Vorhersagen mindestens einmal richtig tippt? Notiere deine Rechnung.

e) (e1) Ergänze folgende Tabelle:

Anzahl der Spiele	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit für die richtige Vorhersage aller Spiele	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			

(e2) Trage die Werte aus der Tabelle in ein Koordinatensystem ein. Dabei soll die Anzahl der Spiele auf der x-Achse und die zugehörige Wahrscheinlichkeit auf der y-Achse eingetragen werden.

(e3) Erläutere, warum es bei dem hier betrachteten Zusammenhang nicht sinnvoll ist, die einzelnen Punkte zu einem durchgehenden Graphen zu verbinden.

f) W(n) sei die Wahrscheinlichkeit, dass Paul n Spiele hintereinander richtig vorhersagt. Gib eine Formel für W(n) an.

8) Pferdewetten (NT2012)

a) Bei einem Pferderennen gibt es ein Spiel, bei dem man „Pferdewetten“ nachspielen kann. Alle Pferde haben bei dem Spiel die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit. Paul, Lina und Tessa spielen bei unterschiedlichen Wetten mit.

(a1) Paul wettet in einem Rennen mit acht Pferden auf das Pferd 7 als Sieger. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Paul die Wette gewinnt?

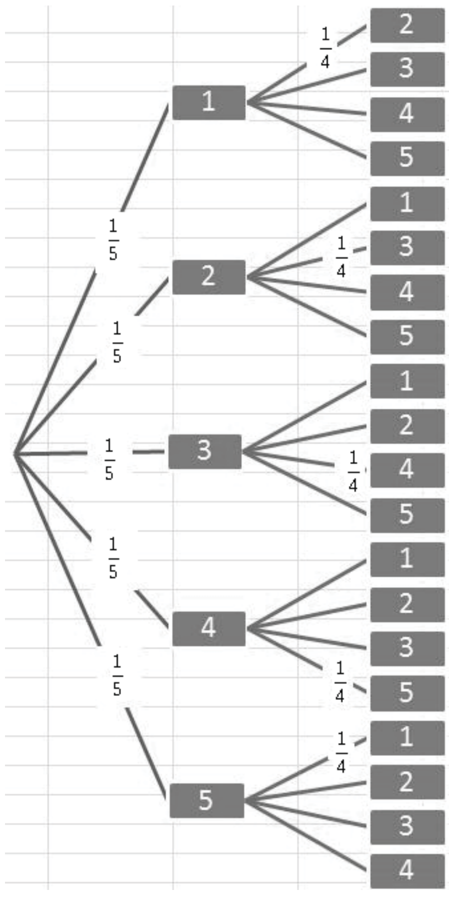
(a2) Pauls Pferd hat eine Quote von 36 : 10 erhalten, d. h. für einen Einsatz von 10 Talern bekommt er im Falle des Gewinns 36 Taler. Paul setzt 15 Taler. Wie viel Taler bekommt Paul, wenn er die Wette gewinnt? Notiere deine Rechnung.

b) Lina wettet in einem Rennen mit fünf Pferden darauf, dass Pferd 4 Erster und Pferd 5 Zweiter wird.

(b1) Zeige mithilfe des abgebildeten Baumdiagramms, dass ihre Gewinnwahrscheinlichkeit 5% beträgt.

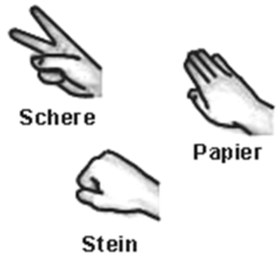
(b2) Erkläre, warum sich die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm von der ersten zur zweiten Stufe verändern.

(b3) Tessa wettet im selben Rennen darauf, dass Pferd 3 Erster oder Zweiter wird. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tessa die Wette gewinnt? Begründe deine Antwort.



9) Stein – Schere – Papier (HT2013)

Anne und Paul spielen „Stein – Schere – Papier“. Auf ein Komma gleichzeitig ihre Hand zu einem der drei Zeichen. Es gilt:



- „Stein“ gewinnt gegen „Schere“, weil er die Schere stumpf macht.
- „Schere“ gewinnt gegen „Papier“, weil sie das Papier schneidet.
- „Papier“ gewinnt gegen „Stein“, weil es den Stein einwickelt.
- Zeigen beide dasselbe Zeichen, endet die Runde unentschieden.

Im Folgenden wird angenommen, dass beide ihre Wahl rein zufällig treffen.

a) Anne und Paul spielen das Spiel achtmal. Sie haben die ersten fünf Runden mit folgenden Ergebnissen gespielt.

	1. Runde	2. Runde	3. Runde	4. Runde	5. Runde	6. Runde	7. Runde	8. Runde
Anne	Papier	Papier	Stein	Schere	Stein			
Paul	Stein	Schere	Stein	Papier	Schere			

(a1) Wie viele Runden hat Anne gewonnen?

(a2) Gesamtsieger ist, wer die meisten Runden gewonnen hat. Fülle die Tabelle so aus, dass Paul der Gesamtsieger ist.

b) (b1) Notiere in der Tabelle unten, wer jeweils gewinnt. Wo liegt ein Unentschieden vor? (Die rechte Spalte und die unterste Zeile bleiben zunächst frei.)

(b2) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Runde von Anne „Stein“ und von Paul „Papier“ gewählt werden.

(b3) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Paul eine Runde gewinnt.

(b4) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Paul zwei Runden nacheinander gewinnt.

Paul / **Anne**	**Stein** 	**Schere** 	**Papier** 	
Stein 		**Anne gewinnt**		
Schere 				
Papier 				

c) Das Spiel kann um „Brunnen“ erweitert werden. 

- „Brunnen“ gewinnt gegen „Stein“ und „Schere“, weil sie im Brunnen versinken.
- „Papier“ gewinnt gegen „Brunnen“, weil es ihn abdeckt.

(c1) Trage in die Tabelle von Teilaufgabe (b1) „Brunnen“ ein und fülle die rechte Spalte und die unterste Zeile aus.

(c2) Anne und Paul spielen das Spiel nun mit „Brunnen“. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Runde unentschieden endet, jetzt größer? Begründe.

(c3) Anne überlegt, welches Handzeichen sie machen soll, damit ihre Gewinnchance möglichst groß ist. Gib ihr einen Tipp und begründe ihn z. B. mit Hilfe der Tabelle aus b).

10) Mensch ärgere dich nicht (NT2013)

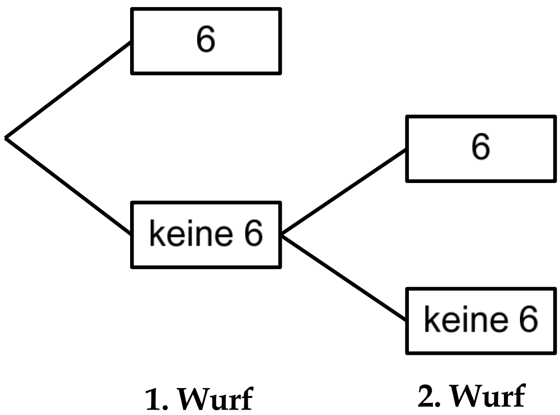
Das Würfelspiel „Mensch ärgere dich nicht!“ wird mit einem Würfel gespielt. Man benötigt eine 6, um eine Figur auf das Startfeld stellen zu können und sie damit ins Spiel zu bringen. Man darf in jeder Runde bis zu dreimal hintereinander würfeln, um die erste 6 zu erzielen. Fällt dabei keine 6, muss man bis zur nächsten Runde warten. Dann darf man es erneut versuchen. Gina beginnt das Spiel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie bereits im ersten Wurf eine 6 würfelt?

b) Gina würfelt im ersten Wurf keine 6. Begründe, warum die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{5}{6}$ beträgt.

Nun ist Anton an der Reihe. Er benötigt zwei Würfe, um seine Figur auf das Startfeld zu stellen.

c) Notiere an allen Pfaden im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten und markiere den Pfad, der Antons Würfen entspricht.



d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der Anton beim ersten Wurf noch keine 6, aber beim zweiten Wurf die 6 würfelt.

Wenn das Spiel beginnt, möchte jeder gerne bereits in der ersten Runde ins Spiel kommen. Dazu muss man mit höchstens drei Würfen eine 6 erzielen.

e) Ergänze das Baumdiagramm aus Aufgabe c) so, dass die erste Runde vollständig dargestellt ist. Gib auch die Wahrscheinlichkeiten an.

f) Max erzielt die 6 erst im dritten Wurf. Begründe, dass die Wahrscheinlichkeit dafür $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$ ist.

g) Gina würfelte bei den ersten drei Würfen keine 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

h) Leo hat bereits drei Runden lang keine 6 gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür? Kreuze an und begründe deine Auswahl.

☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ ☐ $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ☐ $\left(\frac{5}{6}\right)^9$ ☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ ☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^6$

11) Schwarz und Weiß (HT2014)

Jana und Tim haben ein Spiel erfunden. Die Spieler werfen abwechselnd jeweils drei Plättchen, die auf einer Seite weiß und auf der anderen Seite schwarz sind. Die Punkte eines Wurfes ermitteln die Spieler anhand der rechts abgebildeten Tabelle. Jeder Spieler addiert die Punkte seiner Wurfergebnisse auf. Gewonnen hat, wer als Erster genau 31 Punkte erreicht. Wenn ein Spieler durch einen Wurf mehr als 31 Punkte erreicht, dann wird dieser Wurf mit 0 Punkten gewertet.

Wurfergebnis	Punkte
●●●	0
●●○	1
○○●	2
○○○	4

a) Tim hat bereits fünf Punkte. Er wirft die drei Plättchen und hat zwei weiße Seiten und eine schwarze Seite oben liegen. Bestimme Tims Punktzahl nach dem Wurf.

Tim nimmt an, dass die weiße Seite eines Plättchens mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % oben liegt. Nun will er wissen, welche Punktzahl mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht wird. Dazu notiert er alle möglichen Wurfergebnisse in einer Tabelle:

Wurfergebnis 1. Plättchen	**Wurfergebnis** 2. Plättchen	**Wurfergebnis** 3. Plättchen	**Punkte**	**Wahrscheinlichkeit**
schwarz	schwarz	schwarz	0	12,5 %
weiß	schwarz	schwarz	1	37,5 %
schwarz	weiß	schwarz		
schwarz	schwarz	weiß		
			2	
			4	

b) Ergänze in der Tabelle die fehlenden Wurfergebnisse.

c) Trage die Wahrscheinlichkeiten, zwei Punkte bzw. vier Punkte zu erhalten, in die Tabelle ein.

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt zu erhalten, beträgt 37,5 %. Begründe.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal hintereinander einen Punkt zu erhalten?

Jana und Tim spielen gegeneinander.

f) Tim hat bereits 30 Punkte, Jana hat erst 25 Punkte. Jana ist an der Reihe. Gib einen möglichen Spielverlauf an, mit dem Jana mit ihren nächsten beiden Würfen gewinnen kann.

Jana: ________________ Tim: ________________ Jana: ________________

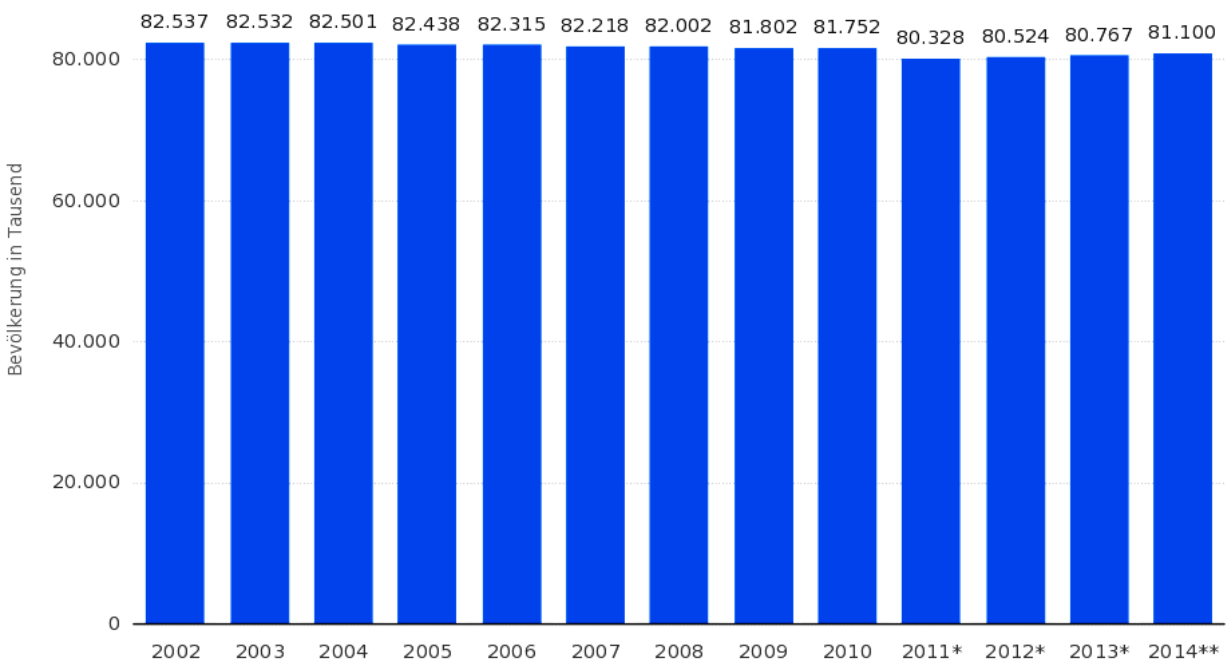
Jana und Tim haben nun jeweils 30 Punkte.

g) Das Ereignis „Tim wirft als nächster und gewinnt nicht“ tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 62,5 % ein. Begründe.

h) Tim behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass mit den nächsten zehn Würfen keiner gewinnt, ist geringer als 1 %!“ Hat Tim recht? Entscheide und begründe deine Entscheidung.

Noch Fit? Bevölkerungswachstum von Deutschland

Die folgende Grafik gibt die Bevölkerungszahlen von Deutschland von 2002 bis 2014 an (in 1000-Einwohnern).



a) Gib das Maximum, das Minimum, die Spannweite, den Mittelwert und Zentralwert der Bevölkerungszahlen an.

b) Gib an, um wie viel Prozent die Bevölkerungszahl von 2002 bis 2014 abgenommen hat.

c) Seit 2011 nimmt die Bevölkerungszahl in Deutschland wieder zu. Berechne, um wie Prozent die Bevölkerung in diesem Zeitraum zugenommen hat.

d) Der Wachstumsfaktor der Bevölkerungszahl von 2013 bis 2014 beträgt $q \approx 1{,}0041$. Begründe.

e) Wie groß wäre die Bevölkerungszahl im Jahr 2050, wenn man ab dem Jahr 2014 von einem jährlichen Wachstumsfaktor q aus Aufgabenteil d) ausgehen würde.

f) Gib den Bevölkerungszuwachs des Jahres 2013 an.

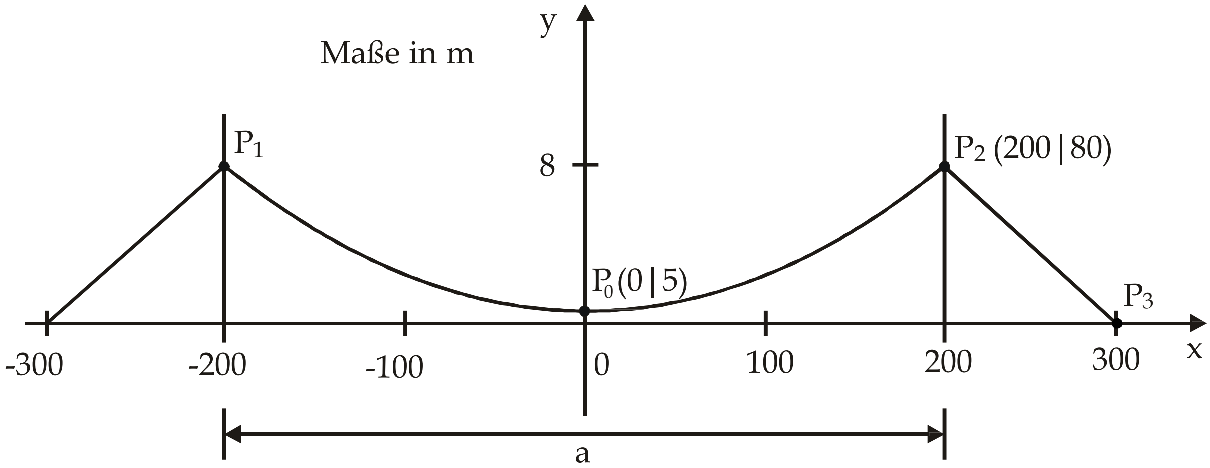
g) Berechne die Bevölkerungszahl des Jahres 2050, wenn man ab 2014 von einem jährlich konstanten Bevölkerungszuwachs des Jahres 2013 ausgeht.

h) Bestimme die prozentuale Abweichung des Wertes aus g) zu dem Wert aus e). Wie kommt es zu diesem Unterschied? Erkläre.

Noch Fit? Modellierung von Hängebrücken (HT 2008)

Das Foto oben zeigt eine Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 80 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.

Der Verlauf des Stahlseils zwischen den Brückenpfeilern kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden.



a) Wie hoch hängt das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern an seiner tiefsten Stelle (P_0) über der Fahrbahn? Notiere den Wert.

b) Wie viele Meter beträgt der Abstand a der beiden Brückenpfeiler?

c) Der Punkt P_2 hat die Koordinaten P_2 (200|80). Bestimme die Koordinaten von P_1.

d) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der Parabel, die den Verlauf des Stahlseils beschreibt.

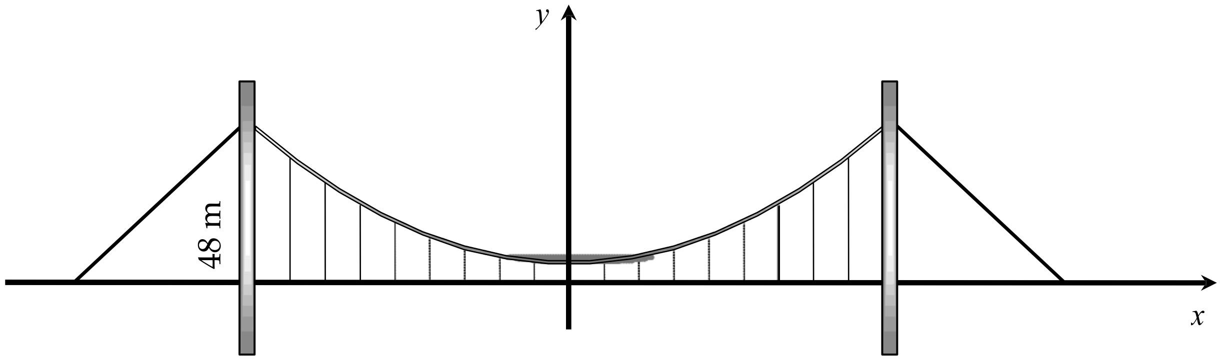
(A) $y = -0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ (B) $y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ (C) $y = 0{,}001875 \cdot x^2 - 5$

(d1) Notiere den zugehörigen Lösungsbuchstaben.

(d2) Erkläre, warum die beiden anderen Funktionsgleichungen die Parabel nicht beschreiben.

e) Berechne die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$. Notiere deine Rechnung.

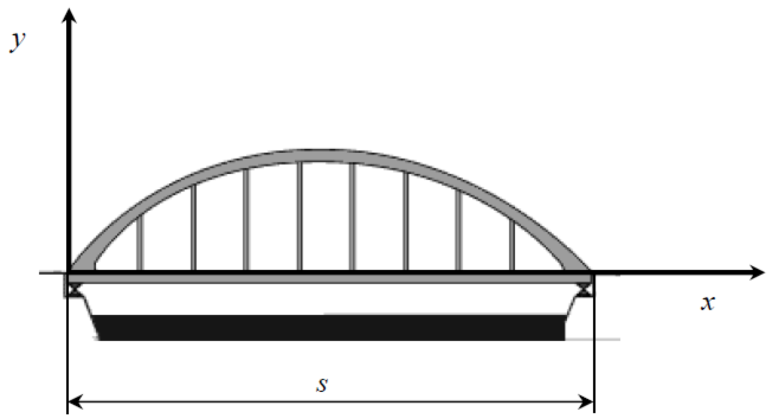
Die folgende Abbildung zeigt eine andere Hängebrücke. Die Stahlseile sind in einer Höhe von 48 m über der Straße an den Brückenpfeilern befestigt.



Das Stahlseil zwischen den Brückenpfeilern hat annähernd die Form einer Parabel. Die Funktionsgleichung dieser Parabel lautet $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$ (x und y in Metern).

f) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung den Abstand zwischen den Brückenpfeilern. Notiere deine Rechnung.

Eine Bogenbrücke (vgl. Abbildung unten) hat annähernd die Form einer Parabel mit zugehöriger Funktionsgleichung $y = -0{,}007 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x$ (x und y in Metern).



g) Bestimme die Spannweite s. Notiere deine Rechnung.

Noch Fit? Dies und Das zu einer quadratischen Pyramide

a) Erstelle eine Zeichnung einer quadratischen Pyramide mit der Grundseite a von 6 cm und einer Höhe h von 8 cm als Schrägbild.

b) Berechne die Länge einer zur Spitze führenden Pyramidenkanten.

c) Ermittle die Oberfläche und das Volumen der Pyramide.

Lösungen unter www.maspole.de.

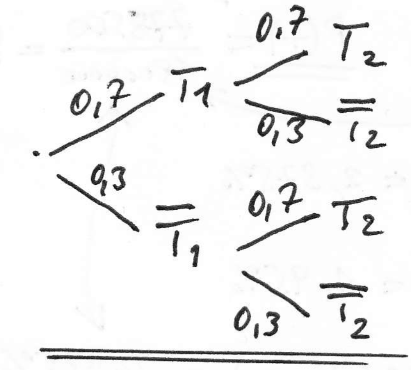
1) a) $1 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \longrightarrow$ Situation B

b) 90% Trefferquote bedeuten 10% Fehlerwahrscheinlichkeit. $10\% = 0{,}1 \longrightarrow$ Situation C

c) 30% Fehlerquote bedeutet, dass es in etwa 30% der Fälle zu einem Fehler kommt.

...., dass die Fehlerwahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 = 30\%$ beträgt.

d) 1)



2) $P(T_1, T_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49 = 49\%$

3) $P(\text{ein Treffer}) = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 42\%$

4) $P(\text{kein fünf Treffer}) = 1 - P(\text{fünf Treffer}) = 1 - (0{,}7)^5 = 83{,}193\%$

e)

Trefferquote	> 85%	< 75%	$< 66{,}\overline{6}$
Anteil	6%	$66{,}\overline{6}\%$	25%

$66{,}\overline{6}\% - 25\% = 41{,}67\%$ haben eine Trefferquote von mehr als $66{,}\overline{6}\%$ und weniger als 75%.

$33{,}\overline{3}\% - 6\% = 27{,}\overline{3}\%$ haben eine Trefferquote von mehr als 75% und weniger als 85%.

2) a) E, da $1{,}7 > 1{,}0$; F, da $26 > 24$

b) Substanz H: Messwert $\approx 5{,}3$ Richtwerte $3{,}3 - 5{,}7$

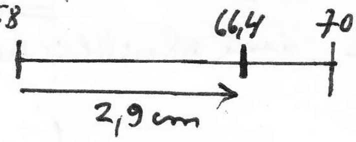
$$\begin{array}{lcl} 2{,}4 & - & 4{,}1\text{ cm} \\ x & - & 0{,}7\text{ cm} \\ \hline 2{,}4:41 & & 0{,}1\text{ cm} \\ 2{,}4:41 \cdot 7 & - & 0{,}7\text{ cm} \end{array}$$

:41 :41 ·7 ·7

$X = \frac{2{,}4}{41} \cdot 7 \approx 0{,}4$

Messwert $\approx 5{,}7 - 0{,}4 = 5{,}3$

c)



$$\begin{array}{lcl} 4{,}1\text{ cm} & - & 12 \\ x\text{ cm} & - & 8{,}4 \\ \hline 4{,}1:12\text{ cm} & - & 1 \\ x = \frac{4{,}1}{12} \cdot 8{,}4 & - & 8{,}4 \end{array}$$

:12 :12 ·8,4 ·8,4

$X \approx 2{,}9$ cm

d) $1{,}0 - 100\%$ Der Richtwert wird um $\underline{\underline{70\%}}$
$1{,}7 - 170\%$ überschritten.

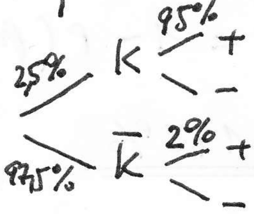
e) 1) $25 - 1000$ $\quad x = 25 \cdot 18000 = \underline{\underline{450\,000}}$ Menschen
$\cdot 18000 \downarrow x - 18000000 \downarrow : 18000$ sind in NRW davon betroffen

Alternativ: $\frac{25}{1000} = 2{,}5\%$ $\quad$ 2,5% von $18000000 = 2{,}5\% \cdot 18000000$
$= 450\,000$

2)

	K	$\overline{K}$	Σ
+	$0{,}95 \cdot 450000 = 427500$	$0{,}02 \cdot 17550000 = 351000$	778500
−	22500	17199000	17221500
Σ	450000	17550000	18000000

$\underline{P(+)} = \frac{778500}{18000000} = \underline{\underline{4{,}325\%}}$

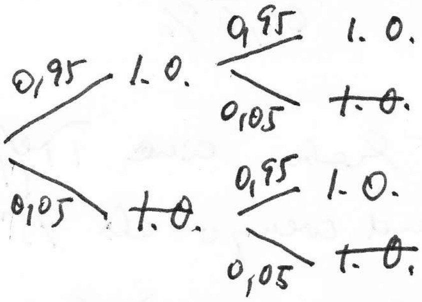
3) 

$P(K,+) = 2{,}5\% \cdot 95\% = 2{,}375\%$

$P(\overline{K},+) = 97{,}5\% \cdot 2\% = 1{,}95\%$

$\underline{\underline{P(+)}} = P(K,+) + P(\overline{K},+) = \underline{\underline{4{,}325\%}}$

---

3) a) 

b) $P(\text{i.O.}, \text{i.O.}) = 0{,}95 \cdot 0{,}95$
$= \underline{\underline{90{,}25\%}}$

c) P(ein Tacho in Ordnung)
$= 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}95$
$= \underline{\underline{9{,}5\%}}$

---

4) a) Maximum = 74244 $\quad$ Minimum = 23000

$\underline{\underline{\text{Spannweite}}} = 74244 - 23000 = \underline{\underline{51244}}$

Median = 23000, 25361, 25597, 25641, $\underline{\underline{27190}}$, 30000, 46297, 49240, 74244

Mittelwert = Summe aller Zuschauerplätze : 9 ≈ $\underline{\underline{36286}}$

b) $4 \cdot 25597 + 74244 + 4 \cdot 23000 + 4 \cdot 27190 + 4 \cdot 49240$
$+ 4 \cdot 30000 + 3 \cdot 46297 + 4 \cdot 25641 + 4 \cdot 25361 = \underline{\underline{1037251}}$

c) 1) $32 \cdot 25000 = 800\,000$ $\quad$ $27000000 : 800000 = \underline{\underline{33{,}75}}$
Die Pressemitteilung geht von einem durchschnittlichen Kartenpreis von $\underline{\underline{33{,}75\,€}}$ aus.

2) $0{,}8 \cdot 1037251 = 25931{,}275 \approx 26000$ Dies sind 1000 Zuschauer mehr als in der Pressemitteilung.

d) 1) Achtelfinale = 8 Spiele   Halbfinale = 2 Spiele
Viertelfinale = 4 Spiele   Finale = 1 Spiel

Σ 15 Spiele. Es müssen 15 Spiele gespielt werden.
(bei Spiel um Platz 3 = 16 Spiele)

2)
$\frac{1}{16}$ Deutschland $\frac{1}{15}$ Brasilien
$\frac{1}{16}$ Brasilien $\frac{1}{15}$ Deutschland

Wenn Deutschland zu Beginn gezogen wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}$

$$P(\text{Deutschland} - \text{Brasilien}) = P(D, B) + P(B, D)$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{15} = 0{,}008\overline{3}$$

---

5) a) Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag kein Regentag folgt, beträgt 20% + 40% = 60%.

b) P(☀, ☀) = 0,45   P(☀, ☀, ☀) = 0,45 · 0,45 = 0,2025

---

6) a) 1) 40 000 000 : 365 ≈ 109589 ≈ 110000
Die Anzahl ist mehr als doppelt so hoch, liegt also über 100% über dem Durchschnitt des Jahres.

Exakt:

109589 — 100%
220 000 — x%
1 — 100% : 109589
220 000 — 100% : 109589 · 220000

$$x = \frac{100\%}{109589} \cdot 220000 \approx 200{,}75\%$$

Alternativ:
$$q = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} \cdot 100\% = \frac{220\,000}{109\,589} \cdot 100\% \approx 200{,}75\%$$

2) 2,8% · 40 000 000 = 0,028 · 40000000 = 1 160 000

3) 1160 000 · 670 € = 777 200 000 €

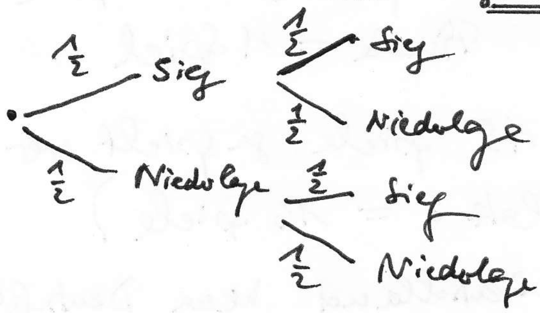
4) 5% 1 160 000 = 0,05 · 1 160 000 = 58000

b) 1) Dauer: 10 s + 30 s + 13 s + 30 s + 4 min = 5 min 23 s

2) 1 —25%— 2 —40%— 3   25% · 40% = 0,25 · 0,4 = 10%

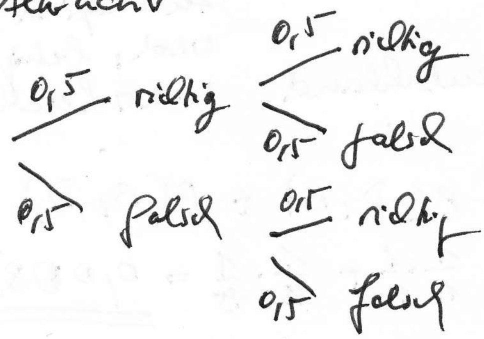
7) a) Sieg entspricht $\underline{\underline{1, 2, 3}}$ oder $\underline{\underline{\text{gerade}}}$ Niederlage entspricht $\underline{\underline{4, 5, 6}}$ oder $\underline{\underline{\text{ungerade}}}$

b)



Sieg = Sieg der Mannschaft A
Niederlage = Niederlage der Mannschaft A
Unentschieden gibt es nicht (z.B. ab Achtelfinale)

Alternativ



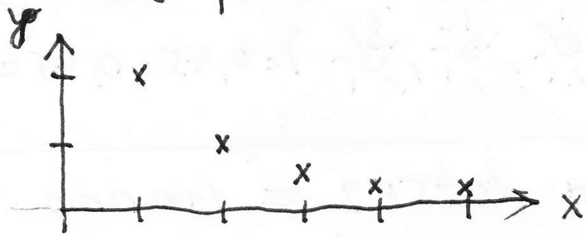
c) $\underline{\underline{P(\text{richtig}, \text{richtig})}} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

d) $\underline{\underline{P(\text{mindestens } 1\times \text{ richtig})}}$
$= 1 - P(2\times \text{ falsch}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

e) 1)

Anzahl X der Spiele	1	2	3	4	5
Wahrscheinlichkeit y für die richtige Vorhersage aller Spiele	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\underline{\underline{\frac{1}{8}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\underline{\underline{\frac{1}{16}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\underline{\underline{\frac{1}{32}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

2)



3) Die Anzahl der Spiele muss eine natürliche Zahl sein, so dass keine „Zwischenpunkte" sinnvoll sind.

f) $\underline{\underline{W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

---

8) a) 1) $P(\text{Sieg des Pferdes } 7) = \underline{\underline{\frac{1}{8}}} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$

2) $\left.\begin{matrix} 10 - 36 \\ 15 - X \end{matrix}\right.$ $\cdot 1{,}5$ $\quad \underline{\underline{X}} = 36 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{54}}$

b) 1) $P(4 \text{ Erster und } 5 \text{ Zweiter}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 5\%$

2) Für Platz 1 hat jedes Pferd die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, für Platz 2 haben die restlichen vier Pferde eine gleiche Chance von $\frac{1}{4}$.

3) $P(3, X) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ $\quad P(X, 3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ $\quad X = 1, 2, 4, 5$

$P(3 \text{ wird Erster oder } 3 \text{ wird Zweiter}) = 4 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{40\%}}$

9) a) 1) <u>3 x</u>

2) In den ersten fünf Runden hat Anna 3x gewonnen Paul nur 1x. Daher muss Paul die restlichen drei Runden alle gewinnen, z.B.

	6.	7.	8.
Anna	Schere	Papier	Stein
Paul	Stein	Schere	Papier

b) 1)

Anna \ Paul	Stein	Schere	Papier	Brunnen (C1)
Stein	Unents.	Anna gew.	Paul gew.	Paul gew
Schere	Paul gew.	Unents.	Anna gew.	Paul gew.
Papier	Anna gew.	Paul gew.	Unents.	Anne gew.
Brunnen (C1)	Anne gew.	Anne gew.	Paul gew.	Unent.

2) $P(\text{Anna Stein und Paul Papier}) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

3) $P(\text{Paul gewinnt}) = \frac{3}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

4) $P(\text{Paul gewinnt 2 Runde nacheinander}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

c) 2) $P(\text{Unentschieden}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} < P(\text{Unentschieden mit}) = \frac{1}{3}$

= mit 4 Symbolen =   = Stein, Schere, Papier =

3) <u>Papier</u> & <u>Brunnen</u> gewinnen jeweils gegen 2 Symbole im Gegensatz zu Stein und Schere. Da Papier gegen Brunnen gewinnt, ist Papier am günstigsten.

---

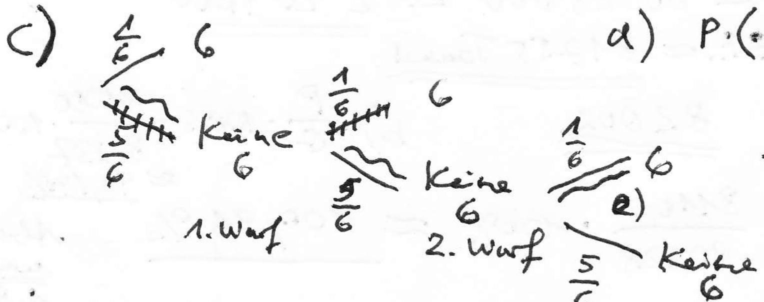
10) a) $P(\text{6 im ersten Wurf}) = \underline{\frac{1}{6}}$

b) $P(\text{Keine 6 im ersten Wurf}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$

oder $= 1 - P(\text{6 im ersten Wurf})$

$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, da „Keine 6 im ersten Wurf" das Gegenereignis ist zu „6 im ersten Wurf"

c)



d) $P(\text{keine 6}, 6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{36}}} \approx 14\%$

f) $P(\text{keine 6, keine 6, 6})$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 12\%$

g) $P(\text{3x Keine 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{125}{216}}}$

$\approx 58\%$

h) $P(\text{3 Runden Kein 6}) = P(\text{9x Keine 6})$

$= \underline{\underline{\left(\frac{5}{6}\right)^9}} \approx 19\%$

11) a) Zwei weiße und eine schwarze Seite ergeben 2P, daher hat er nun 7 Punkte

b)

w	w	s		
w	s	w	2P	$P(...) = \frac{3}{8} = 37,5\%$
s	w	w		
w	w	w	4P	$P(...) = \frac{1}{8} = 12,5\%$

c)

d) $P(1P) = \underbrace{P(wss)}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}} + \underbrace{P(sws)}_{=\frac{1}{8}} + \underbrace{P(ssw)}_{=\frac{1}{8}} = \frac{3}{8} = 37,5\%$

Alternativ $P(1P) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{3}{8} = 37,5\%$

e) $P(2\times 1P) = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{64} \approx 14\%$

f) Jana: wws = 2P Tim: sss = 0P oder www = 4P oder wws = 2P Jana: www = 4P

g) $P(\text{Tim wirft ... gewinnt nicht})$
$= P(0P \text{ o. } 2P \text{ o. } 4P)$
$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 62,5\%$

h) $P(10\times \text{ in Folge } 0P \text{ oder } 2P \text{ oder } 4P) = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0,0091 \leq 1\% = 0,01$

Tim hat recht.

Bevölkerungswachstum

a) Maximum = 82537000 Minimum = 80328000

Spannweite = 82537000 − 80328000 = 2209000

Mittelwert = 81755077.. ≈ 81755 Tausend

Zentralwert = Median = 82002

b) $\frac{P}{G}\cdot 100\% = \frac{81000}{82537}\cdot 100\% \approx 98,14\%$

Abnahme um 1,86%

c) $\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}\cdot 100\% = \frac{81100}{80328}\cdot 100\% \approx 100,96\%$

Zunahme um 0,96%

d) $q = \frac{81100}{80767} \approx 1{,}0041$

Alternativ : $P_{2014} = P_{2013} \cdot q^1 \Rightarrow q = \frac{P_{2014}}{2013} = \ldots$

e) $P_{2050} = P_{2014} \cdot q^{36} = 81100 \cdot 1{,}0041^{36} \approx \underline{\underline{93855}}$

f) Bevölkerungszuwachs des Jahres 2013

$= P_{2014} - P_{2013} = 81100 - 80767 = \underline{\underline{330 \text{ Tausend}}}$

g) Lineares Wachstum : $P_{2050} = P_{2014} + 36 \cdot 330$

$= 81100 + 36 \cdot 330 = \underline{\underline{92980}}$

h) G = Grundwert = 93855

P = Prozentwert = 92980

$\frac{P}{G} \cdot 100\% = \frac{92980}{93855} \cdot 100\% \approx 99{,}07\%$

Prozentuale Abweichung der Werten aus g) zum Wert aus e)

$= \underline{\underline{0{,}93\%}}$. Der Unterschied erklärt sich dadurch, dass das exponentielle schneller ist als das lineare Wachstum der deutschen Bevölkerung.

Modellierung von Hängebrücken

a) Es hängt 5m unter der Fahrbahn, da der y-Wert des Punktes P_0 5 ist.

b) Der Abstand a der beiden Brückenpfeiler beträgt 400 m, da P_1 und P_2 x-Werte haben, die ± 200 sind.

c) $\underline{\underline{P_1(-200|80)}}$

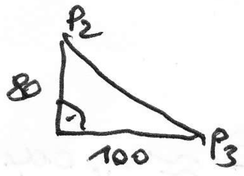
d) 1) B : $y = 0{,}001875 \cdot x^2 + 5$ beschreibt die Parabel, da der y-Achsenabschnitt 5 ist, und die Parabel nach oben geöffnet ist. Ansatz zur Herleitung : $y = a \cdot x^2 + 5$

$P_2(200|80)$ liegt auf der Parabel : $80 = a \cdot 200^2 + 5$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{a}} = \frac{75}{200^2} = \frac{3}{1600} = \underline{\underline{0{,}001875}}$

2) A ist nach unten geöffnet wegen $a = -0{,}001875$, C hat den y-Achsenabschnitt −5

e) $\overline{P_2P_3}^2 = 100^2 + 80^2$

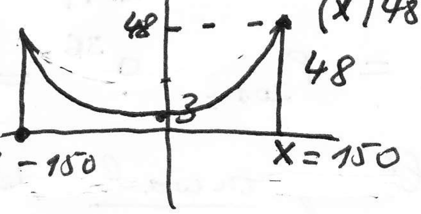


Satz des Pythagoras

$\overline{P_2P_3} = \sqrt{100^2 + 80^2}$

$\approx 128{,}06$

f) $y = 0{,}002 \cdot x^2 + 3$



Ansatz: $48 = 0{,}002\,x^2 + 3 \quad | -3$

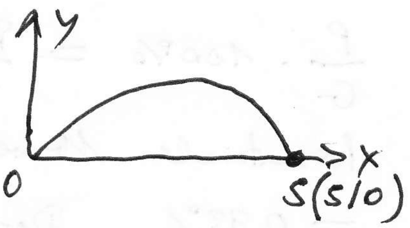
$\Leftrightarrow 45 = 0{,}002\,x^2 \quad | : 0{,}002$

$\Leftrightarrow 22500 = x^2 \quad | \sqrt{\ldots}$

$\Leftrightarrow \underline{\pm 150 = x}$

Abstand der Brückenpfeiler: $\underline{300\ m}$

g) $y = -0{,}007\,x^2 + 1{,}3\,x$



Ansatz $0 = -0{,}007 \cdot s^2 + 1{,}3 \cdot s$

$\Leftrightarrow 0 = s\,(-0{,}007\,s + 1{,}3)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{s = 0}} \vee -0{,}007\,s + 1{,}3 = 0$

$\Leftrightarrow 0{,}007\,s = 1{,}3 \Leftrightarrow \underline{\underline{s}} = \frac{1{,}3}{0{,}007} \approx \underline{\underline{185{,}71}}$

Alternativ $0 = -0{,}007\,s^2 + 1{,}3\,s \quad | : (-0{,}007)$

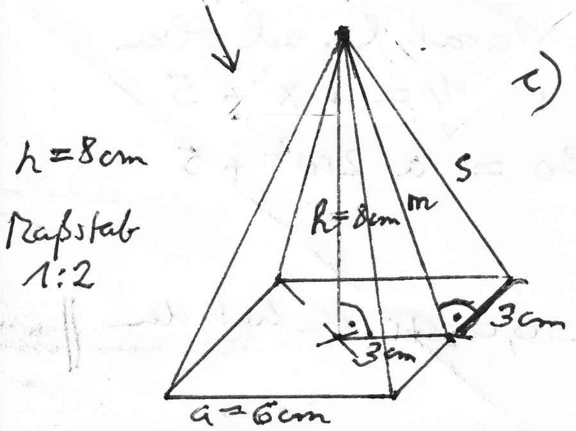
$0 = s^2 - \frac{1300}{7}s \qquad p = -\frac{1300}{7} \qquad q = 0$

$\underline{\underline{s_1}} = \frac{650}{7} + \sqrt{\left(\frac{650}{7}\right)^2 - 0} = \underline{\underline{\frac{1300}{7}}} \qquad \underline{\underline{s_2}} = \frac{650}{7} - \sqrt{\left(\frac{650}{7}\right)^2 - 0} \underline{\underline{= 0}}$

Die Spannweite s beträgt ca. $\underline{\underline{186\ m}}$

Pyramide

a)



b) $\underline{m} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \approx \underline{8{,}54}$ [cm]

$\underline{\underline{s}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{73 + 9} = \sqrt{82} \approx \underline{9{,}06}$ [cm]

c) $\underline{\underline{V}} = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3}6^2 \cdot 8 \underline{\underline{= 96}}$ [cm³]

$O = G + 4 \cdot \Delta$

$\underline{\Delta} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{73}}{2} = \underline{3\sqrt{73}} \qquad \underline{G} = a^2 = \underline{36}$

$\underline{\underline{O}} = 36 + 4 \cdot 3\sqrt{73} = 36 + 12\sqrt{73} \approx \underline{138{,}53}$ [cm²]